IL TEOREMA DEI NUMERI PRIMI

Theorem 1. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si definisce*

$$\pi(x) := \sharp\{primi < x\}.$$

Allora

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

Questo teorema fu congetturato per la prima volta da Legendre nel 1798 e pochi anni più tardi da Gauss. Le stime di Tchebyshev sono un risultato preliminare in questa direzione ma sono ovviamente molto più deboli. Ad ogni modo le idee usate da Tchebyshev usano la famosa formula prodotto di Eulero: per $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{s \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Nel 1859 Riemann ebbe l'idea geniale di considerare la ζ di Eulero non più per una variabile $s \in \mathbb{R}$, ma per una $s \in \mathbb{C}$ di parte reale maggiore di 1, per questo è oggi nota come "ζ di Riemann" e non come "ζ di Eulero". Riemann non riesce a dimostrare il teorema dei numeri primi, ma i risultati che ottiene, quale l'equazione funzionale per la funzione zeta di Riemann, e il punto di vista nuovo che introduce saranno fondamentali per la successiva dimostrazione che arriverà indipendentemente nel 1896 da Hadamard e da de la Valle Poussin. Entrambe le dimostrazioni utilizzano metodi di analisi complessa e si basano principalmente sulla dimostrazione che la funzione zeta di Riemann non ha zeri nella retta $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Sono disponibili delle "dimostrazioni elementari" del Teorema dei numeri primi, ossia dimostrazioni che non usano metodi di analisi complessa. La prima fra queste stata fornita in parte indipendentemente da Paul Erdos e Atle Selberg nel 1949. Questa può essere trovata su [1] e questa potrebbe essere un buon punto di partenza per un tema d'esame.

Per chi fosse interessato ad approfondire una dimostrazione recente del teorema dei numeri primi, suggerisco l'approfondimento sul libro di Newman [2].

References

[1] R. Courant, H. Robbins, Che cos'è la matematica?, Bollati Boringhieri.

[2] D.J. Newman. Analytic number theory, volume 177. Springer, 1998.