

## ESERCIZI DI TEORIA DEI NUMERI

A. BERNARDI

### FOGLIO 3, PARTE PRIMA

**Esercizio 1.** Mostrare che  $\overline{\mathbb{Q}}$  è numerabile e concludere che questo è un altro modo (diverso da quello visto a lezione) per vedere che  $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$ .

**Esercizio 2** (Enunciato a lezione senza dimostrazione). Sia  $z \in \mathbb{Q}$  allora  $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z$  è radice di un polinomio monico a coefficienti interi.

**Esercizio 3.** Mostrare che un anello fattoriale è integralmente chiuso.

**Esercizio 4.** (1) Calcolare  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3} : \mathbb{Q})]$ .  
(2) Determinare il polinomio minimo di  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  su  $\mathbb{Q}$ .  
(3) Mostrare che  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .  
(4) Trovare una base di  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  su  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 5.** (1) Mostrare che  $\mathbb{Q}(i\sqrt{5}) = \mathbb{Q}[i\sqrt{5}] \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 5)$ .  
(2) Qual è il grado dell'estensione  $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ ? Trovarne una  $\mathbb{Q}$ -base.

**Esercizio 6.** Determinare polinomi minimi e rispettive radici dei seguenti elementi algebrici:  $\sqrt{2} + i, \sqrt{2} + 3i, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + i$ .

**Esercizio 7.** Sia  $K$  una estensione di  $\mathbb{Q}$  di grado 2.

- (1) Mostrare che se  $L/\mathbb{Q}$  è un'estensione di grado  $p$  con  $p$  primo, allora ogni elemento di  $L/\mathbb{Q}$  è primitivo.
- (2) Sia  $K$  una estensione di grado 2 di  $\mathbb{Q}$ . Mostrare che  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  con  $d$  senza fattori quadrati.
- (3) Mostrare che ogni estensione di grado 2 è di Galois.
- (4) Trovare un esempio di estensione di grado 3 che non sia di Galois.