# ESERCIZI DI TEORIA DEI NUMERI

A. BERNARDI

## Foglio 3, parte prima

**Esercizio 1.** Mostrare che $\overline{\mathbb{Q}}$ è numerabile e concludere che questo è un altro modo (diverso da quello visto a lezione) per vedere che $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$.

**Esercizio 2** (Enunciato a lezione senza dimostrazione)**.** Sia $z \in \mathbb{Q}$ allora $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z$ è radice di un polinomio monico a coefficienti interi.

**Esercizio 3.** Mostrare che un anello fattoriale è integralmente chiuso.

**Esercizio 4.**
(1) Calcolare $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3} : \mathbb{Q})]$.
(2) Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$.
(3) Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
(4) Trovare una base di $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ su $\mathbb{Q}$.

**Esercizio 5.**
(1) Mostrare che $\mathbb{Q}(i\sqrt{5}) = \mathbb{Q}[i\sqrt{5}] \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 5)$.
(2) Qual è il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})/\mathbb{Q}$? Trovarne una $\mathbb{Q}$-base.

**Esercizio 6.** Determinare polinomi minimi e rispettive radici dei seguenti elementi algebrici: $\sqrt{2} + i, \sqrt{2} + 3i, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + i$.

**Esercizio 7.** Sia $K$ una estensione di $\mathbb{Q}$ di grado 2.
(1) Mostrare che se $L/\mathbb{Q}$ è un'estensione di grado $p$ con $p$ primo, allora ogni elemento di $L/\mathbb{Q}$ è primitivo.
(2) Sia $K$ una estensione di grado 2 di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ con $d$ senza fattori quadrati.
(3) Mostrare che ogni estensione di grado 2 è di Galois.
(4) Trovare un esempio di estensione di grado 3 che non sia di Galois.