**ESERCIZI DI TEORIA DEI NUMERI**

A. BERNARDI

## Quinto foglio di esercizi

**Esercizio 1.** Mostrare che un anello principale è di Dedekind. Dare un esempio di un UFD che non sia di Dedekind.

**Esercizio 2.** Se $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, sappiamo che $\mathcal{O}_K = \{a+b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Siano $I = (2, 1+\sqrt{-5})$, $J = (3, 1+\sqrt{-5})$, $H = (3, 1-\sqrt{-5})$.

(1) Mostrare che $I$ è massimale. Determinare una base intera di $I$. Mostrare che $J, H$ sono massimali e $J \neq H$.
(2) Mostrare che $(2) = I^2$, $(3) = JH$, $IJ = (1+\sqrt{-5})$, $IH = (1-\sqrt{-5})$.
(3) In $\mathcal{O}_K$ si hanno due fattorizzazioni distinte di 6: $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$.
(4) La fattorizzazione in ideali primi di (6) è $(6) = I^2JH$. Quindi le due fattorizzazioni di 6 si possono vedere raggruppando in due modi possibili i diversi fattori: $(6) = (2)(3) = (I^2)(JH)$ o $(6) = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = (IJ)(IH)$.

**Esercizio 3.** Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ e $I = (2, 1+\sqrt{-5}) \subset \mathcal{O}_K$. Determinare $d_I$ e $N(I)$ e concludere che $I$ è primo.

**Esercizio 4.** Mostrare che la norma di un ideale proprio $I \subset \mathbb{O}_K$, con $K$ campo di numeri, è strettamente maggiore di 1.

**Esercizio 5.** Mostrare che esistono infiniti convergenti distinti.

**Esercizio 6.** Mostrare che le radici dell'unità in un campo quadratico reale $K$ sono solo $\{\pm 1\}$.

**Esercizio 7.** Determinare l'unità fondamentale di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ $(d > 0)$ per $d = 3, 5, 6, 7$.

**Esercizio 8.** Scopo di questo esercizio è determinare tutti gli interi $n$ tali che lo sviluppo in frazioni continue di $\sqrt{n}$ abbia lunghezza del periodo $h \leq 2$:

(1) $\sqrt{n} = (a_0; \overline{2a_0})$ se e solo se $n = a^2 + 1$ (caso $h = 1$);
(2) $\sqrt{n} = (a_0; \overline{a_1, 2a_0})$ se e solo se $n = a^2r^2 + a$ con $a > 1$ o $n = t^2a^2 + 2t$ (caso $h = 2$).

Sia $(u, v)$ la soluzione fondamentale dell'equazione $x^2 - dy^2 = 1$ con $d = a^2r^2 + a$. Mostrare che, in dipendenza da $a$ e da $r$, può succedere sia che $u > d$ sia che $u < d$.

**Esercizio 9.** Mostrare che nonostante $-1$ sia un quadrato modulo 34, l'equazione anti-Pelliana $x^2 - 34y^2 = -1$ non ha soluzioni intere.