ESERCIZI DI TEORIA DEI NUMERI

A. BERNARDI

Sesto foglio di esercizi

Esercizio 1. Mostrare che se $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ allora $h_K = 2$.

Esercizio 2. Mostrare che se $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-31})$ allora $h_K = 3$.

Esercizio 3. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un primo congruo a 5 modulo 12. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$.

(1) Mostrare che 3 è decomposto in K. Quindi $(3) = \wp\overline{\wp}$.
(2) Mostrare che se $p > 3^n$, allora $\wp$ ha ordine almeno n in Cl_K. Quindi $h_K \geq n$.

Esercizio 4. Usando le forme quadratiche mostrare che se $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$ allora $h_K = 4$.

Esercizio 5. Usando le forme quadratiche mostrare che se $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-19}), \mathbb{Q}(\sqrt{-67}), \mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ allora $h_K = 1$.

C'è una famosa osservazione di Eulero che dice che il polinomio $x^2 + x + 41$ è primo per tutti gli $x = 0, \ldots, 39$. Qual è il discriminante di questa forma quadratica? Spiegare perché l'osservazione di Eulero implica che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ ha $h_K = 1$.

Verificare un risultato analogo per $x^2 + x + 11$ e $x^2 + x + 17$.

Il famoso Class Number 1 Problem (risolto) dice che questi sono gli unici campi quadratici immaginari con class number 1. Abbiamo già mostrato che se $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ libero da quadrati e negativo allora $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ è a fattorizzazione unica se e solo se $d = -1, -2$.

Esercizio 6. Supponiamo $d < 0$ e $D = 4, d$. Mostrare che gli unici casi in cui si ha un sola forma quadratica ridotta di discriminate D sono quelli in cui $d = -1, -2, -3, -4, -7$.