Analisi Matematica II		2 Aprile 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. (8 punti)
Stabilire se il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^2$ (dotato della topologia euclidea standard) definito come $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y \geq 1\}$ è aperto, chiuso e/o compatto.

Soluzione.

Si può definire la funzione continua $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y$ e osservare che X è controimmagine dell'intervallo chiuso $[1, +\infty)$ attraverso f, perciò X è chiuso. Dato che $f(0, 0) = 0 < 1$, ovvero $(0, 0) \notin X$, si ha che $X \neq \mathbb{R}^2$ e dato che $f(0, 3) = 3 > 1$, ovvero $(0, 3) \in X$, si ha che $X \neq \emptyset$, per cui X non è aperto (in quanto gli unici aperti/chiusi del connesso $\mathbb{R}^2$ sono $\mathbb{R}^2$ e $\emptyset$).
Poiché $(0, y) \in X$ per ogni $y \geq 1$, si ha che X non è limitato e quindi non compatto.

Analisi Matematica II		2 Aprile 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

2. (12 punti)
Studiare continuità , derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{[\exp(xy)-1-xy]y}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nel suo dominio.

Soluzione.

Il dominio di f è $\mathbb{R}^2$ e $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ in quanto composizione di funzioni continue. Si deve verificare la continuità nell'origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[\exp(xy)-1-xy]y}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2(x^4+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{2}\frac{x^2y^2}{(x^4+y^4)} = 0,$$

dato che $0 \leq \frac{x^2y^2}{(x^4+y^4)} \leq \frac{1}{2}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^0$ su $\mathbb{R}^2$.
Le derivate parziali per $(x,y) \neq (0,0)$ sono:

$$D_x f(x,y) = \frac{(y\exp(xy)-y)y(x^4+y^4) - 4x^3(\exp(xy)-1-xy)}{(x^4+y^4)^2}$$

$$D_y f(x,y) = \frac{((\exp(xy)-1-xy) + y(x\exp(xy)-x))(x^4+y^4) - 4y^3(\exp(xy)-1-xy)}{(x^4+y^4)^2}.$$

Le derivate parziali nell'origine sono nulle in quanto $f(x,0) = f(0,y) = 0$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
f è differenziabile ovunque fuori dall'origine per il teorema del differenziale totale. Testiamo la differenziabilità in $(0,0)$ secondo la definizione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[\exp(xy)-1-xy]y}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

per verificarlo basta restringersi alla retta $y = x$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{[\exp(x^2)-1-x^2]x}{2x^4\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^5}{4\sqrt{2}x^5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

f non è differenziabile nell'origine e quindi nemmeno $\mathcal{C}^1$ in quel punto.

Analisi Matematica II		2 Aprile 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

3. (10 punti)
Determinare i punti di estremo locale e globale della funzione

$$f(x, y) = \sinh(x^2 + y^2 - xy).$$

Soluzione.

La funzione *seno iperbolico* è strettamente crescente e la sua derivata non si annulla mai quindi i punti di massimo e minimo di f coincidono con quelli di $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ e le due funzioni presentano i medesimi punti critici.
Il gradiente $\nabla F(x, y) = (2x - y, 2y - x)$ si annulla solamente in $(0, 0)$ e la matrice hessiana è :

$$HF(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$HF(0, 0)$ è definita positiva e quindi l'origine è punto di minimo.
Osservando che $\lim_{x\to+\infty} F(x, 0) = +\infty$ possiamo concludere che F, così f, non ammette massimo su $\mathbb{R}^2$. Mentre osservando che $F(x, y) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$, si può concludere che $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto e $\min_{\mathbb{R}^2} f = 0$.