Analisi Matematica II		14 Giugno 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. (10 punti) Si determinino i sottoinsiemi del piano in cui valgano, rispettivamente, continuità, derivabilità e differenziabilità della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy)\ , & y < x^2 \\ 0\ , & y \geq x^2\ . \end{cases}$$

La continuità della funzione nel complemento della curva $y = x^2$ segue dalla stabilità della continuità per la composizione di funzioni continue quali, nel caso nostro, polinomi e funzioni trigonometriche. Nei punti della curva $x \mapsto y = x^2$ di sostegno Γ si procede nel modo seguente: i punti da controllare sono tutte le coppie (x_0, x_0^2) per cui

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2) \\ y<x^2}} f(x,y) = \sin(x_0^3)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0^2) \\ y>x^2}} f(x,y) = 0$$

per cui f è continua se e solo se $\sin(x_0^3) = 0$ ossia, se e solo se $x_0 = \sqrt[3]{k\pi}$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Vediamo ora la derivabilità: controlliamo prima le derivate per coppie $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\cos(xy)\ , & y < x^2 \\ 0\ , & y > x^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\cos(xy)\ , & y < x^2 \\ 0\ , & y > x^2 \end{cases}$$

per cui le derivate parziali di f esistono e sono continue in tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ per i già citati teoremi sulla composizione delle funzioni continue.

Calcoliamo ora le derivate per i punti $(x_0, x_0^2) \in \Gamma$. Sia $x_0 < 0$, si ha

$$f_{x^+}(x_0, x_0^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0$$

$$f_{x^-}(x_0, x_0^2) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin((x_0+t)x_0^2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0^3)\cos(tx_0^2) + \cos(x_0^3)\sin(tx_0)}{t} = \begin{cases} \text{non esiste}\ , & \text{se } x_0 \notin \sqrt[3]{k\pi} \\ x_0^2\cos(x_0^3)\ , & \text{se } x_0 = \sqrt[3]{k\pi} < 0 \end{cases}$$

per cui la derivata parziale rispetto alla x non esiste se $x_0 < 0$. Vediamo ora per il punto $x_0 = 0$, si ha

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0\ .$$

Quindi la derivata parziale di f rispetto a x nell'origine esiste e vale 0. Se facciamo la derivata nei punti $x_0 > 0$ si ottiene, come prima,

$$
\begin{aligned}
f_{x^+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0 \\
f_{x^-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin((x_0+t)x_0^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0^3)\cos(tx_0^2) + \cos(x_0^3)\sin(tx_0)}{t} = \begin{cases} \text{non esiste} \ , & \text{se } x_0 \notin \sqrt[3]{k\pi} \\ x_0^2 \cos(x_0^3) \ , & \text{se } x_0 = \sqrt[3]{k\pi} > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

quindi la derivata parziale della funzione f rispetto ad x non esiste in tutti i punti $x_0 > 0$. Ne concludiamo ossevando che la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x esiste solo nell'origine e vale 0.

Facciamo ora la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile y. Per la simmetria della funzione rispetto allo scambio delle variabile x e y ci troviamo nella stessa situazione di prima avendo:

$$
\begin{aligned}
f_{y^+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 x_0^2 + t) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0 \\
f_{x^-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0, x_0^2+t) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin((x_0+t)x_0^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0^3)\cos(tx_0^2) + \cos(x_0^3)\sin(tx_0)}{t} = \begin{cases} \text{non esiste} \ , & \text{se } x_0 \notin \sqrt[3]{k\pi} \\ x_0^2 \cos(x_0^3) \ , & \text{se } x_0 = \sqrt[3]{k\pi} < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

per cui la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile y esiste solo nell'origine e vale 0.

Per quanto riguarda la differenziabilità si può argomentare nel modo seguente: nei punti $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ la funzione è differenziabile perché le derivate parziali esistono e sono continue. Nei punti $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ la funzione non è differenziabile perché non esistono le derivate parziali, mentre nel punto $(0,0)$ si ha, dalla definizione di differenziabilità e considerando che $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0) = f(0,0)$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y<x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y<x^2}} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\sin\theta(1+o(1)) = 0 \\
&\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y\geq x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0
\end{aligned}
$$

quindi, se ne conclude che la funzione f è differenziabile in $(x,y) \in (\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma) \cup \{(0,0)\}$.

Analisi Matematica II		14 Giugno 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

2. (5 punti) Determinare la natura dei punti stazionari della seguente funzione

$$f(x,y) = \log(1+3y^2) + \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \ .$$

Le derivate parziali prime sono

$$f_x = \frac{x}{2}$$
$$f_y = \frac{6y}{1+3y^2} - \frac{y}{2}$$

Da cui, le uniche soluzioni sono i punti $(0,0)$ e $(0,\pm\sqrt{11/3})$. Calcolando le derivate seconde si ottiene:

$$f_{xx} = \frac{1}{2}$$
$$f_{yy} = \frac{6-18y^2}{(1+3y^2)^2} - \frac{1}{2}$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 0 \ .$$

Da questo la matrice hessiana calcolata nei tre punti vale, rispettivamente,

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \qquad H\left(0, \pm\sqrt{\frac{11}{3}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

per cui da noti teoremi si evince che il punto $(0,0)$ è un punto di minimo locale mentre i punti $(0,\pm\sqrt{11/3})$ non sono né massimi né minimi, ossia di sella.

Analisi Matematica II		14 Giugno 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

3. (5 punti) Calcolare il seguente integrale di linea:

$$\int_{\partial^+ A} \left(\frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} + 3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\, dx + \left(3\sqrt{x^3y} - \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} \right)\, dy$$

dove $A = [1,3]^2$.

La forma differenziale ω è ovviamente definita solo nel complemento del punto $(2,2)$ nel primo quadrante, quindi nell'aperto $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\} \setminus \{(2,2)\}$. Notiamo che l'aperto non è semplicemente connesso. In questo aperto le funzioni componenti la forma $\omega = f dx + g dy$ sono derivabili e si ha:

$$f_y = \frac{(x-2)^2 - (y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2} + \frac{9}{2}\sqrt{xy} = g_x \ ,$$

per cui la forma ω è chiusa in D, ma non è necessariamente esatta perché il dominio D non è semplicemente connesso. A questo punto si possono prendere 3 strade:

1. la prima è integrare direttamente la forma ω sul bordo del quadrato $[1,3]^2$, ma l'integrazione non è semplicissima,

2. la seconda utilizza l'invarianza omotopica degli integrali di forme chiuse rispetto alle curve chiuse e quindi la possibilità di integrare la forma chiusa ω rispetto ad una curva piú conveniente, ma vista la forma non è ovvia quale curva sia la più conveniente,

3. la terza, da preferire per questo esercizio, usa la decomposizione di ω nella somma di una forma chiusa

$$\omega_1(x,y) = \left(3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)\, dx + 3\sqrt{x^3y}dy \ ,$$

che è definita nel primo quadrante, quindi ivi esatta per il Lemma di Volterra-Poincaré, per cui non contribuisce al calcolo dell'integrale lungo la curva chiusa che rappresenta il bordo del quadrato, mentre l'altro termine

$$\omega_2(x,y) = \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\, dx - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\, dy$$

è una forma chiusa definita nel complemento del punto $(2,2)$ in $\mathbf{R}^2$, quindi non semplicemente connesso e quindi la forma ω_2 non necessariamente ivi esatta. Si può però utilizzare, come ricordato nel secondo punto, l'invarianza omotopica degli integrali delle forme chiuse per cammini chiusi e determinare l'integrale di ω_2 lungo una curva più conveniente, ad esempio, vista la forma esplicita del denominatore, lungo la circonferenza centrata nel punto $(2,2)$ e di raggio (positivo) qualsiasi, ad esempio quella di raggio $r = 1$.

Utilizziamo quindi il terzo suggerimento: in coordinate polari la circonferenza γ è parametrizzata dalle componenti $x = 2 + \cos\theta$, $y = 2 + \sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ per cui si ha

$$\int_{\partial^+[1,3]^2} \omega = \int_{\partial^+[1,3]^2} \omega_1 + \omega_2 = \int_{\partial^+[1,3]^2} \omega_1 + \int_{\partial^+[1,3]^2} \omega_2 = 0 + \int_\gamma \omega_2 = \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = 2\pi \ .$$

4. (10 punti) Calcolare i seguenti integrali:

(a)

$$\int\int_D \frac{1}{1+3x^2+y^2}\ dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $3x^2+y^2 \leq c^2\}$, $c > 0$

(b)

$$\int\int\int_E \frac{z}{1+3x^2+y^2}\ dxdydz$$

dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $3x^2+y^2 \leq (z-2)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Nella risoluzione dell'integrale doppio osserviamo per prima cosa che, fissato $c > 0$, il dominio di integrazione è formato dai punti del piano contenuti nell'ellisse, avente i fuochi nell'asse y, di equazione $\frac{x^2}{(\frac{c}{\sqrt{3}})^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$.

Può quindi risultare conveniente fare una trasformazione del piano, rileggendo l'ellisse come il trasformato di una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. La trasformazione in oggetto sarà

$$T_1(x',y') := (\frac{c}{\sqrt{3}}x', cy')\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$$

Osserviamo che la matrice Jacobiana associata a T_1 ha determinante $\frac{c^2}{\sqrt{3}}$.

Così facendo, il nuovo dominio di integrazione diviene l'insieme

$$T_1^{-1}(D) := \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x')^2 + (y')^2 \leq 1\}$$

Effettuiamo infine la classica trasformazione in coordinate polari per completare il calcolo dell'integrale

$$T_2(\rho,\theta) := (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))\ \forall (\rho,\theta) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[$$

Ricordando che la matrice Jacobiana associata a T_2 ha determinante ρ, abbiamo che

$$A := T_2^{-1}(T_1^{-1}(D)) = ((T_1 \circ T_2)^{-1})(D) = \{(\rho,\theta) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[: 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

Ne consegue che

$$\int\int_D \frac{1}{1+3x^2+y^2}\ dxdy = \int\int_A \frac{1}{1+c^2\rho^2}\frac{c^2}{\sqrt{3}}\rho\ d\rho d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln(1+c^2)$$

Passando allo studio dell'integrale triplo si osserva che, posto $c := z - 2 \ \forall z \in [0,1]$, è possibile rileggere il dominio di integrazione come $E = \{(x,y,c) \in \mathbb{R}^3$ tali che $3x^2 + y^2 \leq c^2, \ -2 \leq c \leq -1\}$
A livello pratico stiamo pensando di effettuare la seguente trasformazione

$$T_3(x,y,c) := (x,y,c+2) \ \forall (x,y,c) \in \mathbb{R}^3$$

che, essendo un'isometria, ha determinante della matrice Jacobiana unitario. Ne consegue che

$$\begin{aligned}\int\int\int_E \frac{z}{1+3x^2+y^2}\,dxdydz &= \int_{-2}^{-1} dc \int\int_D \frac{c+2}{1+3x^2+y^2}\,dxdy \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{-5}{2} + \frac{3}{2}\ln(5) - \ln(2) + 4\arctan(2) - \pi\right)\end{aligned}$$