Analisi Matematica II		6 aprile 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. (10 punti) Si consideri la seguente corrispondenza tra $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\sin[\pi(x^2+y^2/5)]}{x^2+y^2/5}} \ .$$

Determinare l'insieme di definizione $A \subseteq \mathbb{R}^2$ di f e

(A) Caratterizzare le proprietà topologiche di A, ossia se è o meno, aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso.

(B) Determinare se la funzione f è o meno continua su A.

(C) Determinare l'estensione per continuità di f ad $\overline{A}$.

(A) La corrispondenza f è caratterizzata dalla composizione di funzioni (continue nel loro domini naturali) quali, polinomi, funzione seno, funzione razionale e funzione radice quadrata. Per avere f come funzione dobbiamo imporre che tale composizione abbia senso. Chiaramente polinomi e il seno sono sempre definiti e non danno problemi, ma la funzione razionale e la radice quadrata impongono restrizioni note, ossia, il denominatore della funzione razionale deve essere sempre non nullo, mentre il radicando deve essere sempre maggiore od uguale a zero. Tali restrizioni, nel nostro caso, danno luogo alle seguenti relazioni valide simultaneamente

$$\sin\left[\pi\left(x^2+\frac{y^2}{5}\right)\right] \geq 0 \ , \qquad x^2+\frac{y^2}{5} \neq 0 \ .$$

Da queste restrizioni determiniamo che il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui f è definita è composto da coppie (x,y) che devono soddisfare le seguenti relazioni

$$\begin{cases} 2k \leq x^2+\dfrac{y^2}{5} \leq 2k+1 \ , \quad k=0,1,2,\dots \\ x^2+\dfrac{y^2}{5} \neq 0 \ . \end{cases}$$

La seconda relazione impone che nella prima, letta per $k=0$, si abbia a sinistra l'inclusione larga, mentre le altre per $k \in \mathbf{N}$ rimangono inalterate, ossia

$$\begin{cases} 0 < x^2+\dfrac{y^2}{5} \leq 1 \ , \qquad\qquad k=0 \ , \\ 2k \leq x^2+\dfrac{y^2}{5} \leq 2k+1 \ , \quad k \in \mathbf{N} \ . \end{cases}$$

L'insieme A è quindi formato dall'unione numerabile di corone ellittiche chiuse con i fuochi sull'asse delle y per $k \in \mathbf{N}$ (la seconda relazione) e dalla regione ellittica $0 < x^2+y^2/5 \leq 1$ che non include l'origine $(0,0)$ (la prima relazione).

La topologia di A è presto determinata: infatti l'insieme non è né aperto né chiuso perchè la prima regione, $0 < x^2+\dfrac{y^2}{5} \leq 1$ non è certamente né aperta né chiusa. L'insieme non è limitato, perchè nessun disco di raggio finito lo include, e quindi non è certamente compatto. L'insieme poi non è nemmeno connesso perchè è unione disgiunta di infinite componenti connesse.

(B) La seconda domanda è anch'essa semplice. La funzione f è certamente continua in A, perchè composizione di funzioni definite e continue in A, come abbiamo già visto in (A).

(C) L'insieme A ha un solo punto di accumulazione (al finito) che non appartiene ad A stesso, ossia l'origine $(0,0)$, quindi $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$. La funzione f non è certamente definita in esso ma il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ ,$$

esiste e vale $\sqrt{\pi}$. Infatti il limite è un caso particolare del limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, al quale ci si può ricondurre cambiando variabile $t = x^2 + y^2/5$ e per la quale è sufficiente considerare la restrizione $0 < t \leq 1$. Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin[\pi(x^2+y^2/5)]}{x^2+y^2/5} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in(0,1]}} \pi \, \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \pi \ .$$

L'estensione per continuità ad $\overline{A}$ è quindi la funzione

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \ , & (x,y) \in A \\ \sqrt{\pi} \ , & (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Analisi Matematica II		6 aprile 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

2. (10 punti) (A) Determinare convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_k(x) = \sqrt[k]{1 + x^{2k}}\ .$$

(B) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+4)^k}{2^k \sqrt{k+1}}\ .$$

La serie convergerà anche uniformemente? Ed in quale intervallo/intervalli?

(A) Le funzioni componenti la successione sono tutte definite in $\mathbb{R}$ e sono tutte pari per la presenza del termine x^2, quindi è sufficiente studiare la convergenza per $x \geq 0$. Per determinare la convergenza puntuale scriviamo

$$f_k(x) = e^{\log(1+x^{2k})^{1/k}} = e^{\frac{1}{k}\log(1+x^{2k})}$$

e notiamo che possiamo discutere il limite $k \to \infty$ (utilizzando il fatto che la funzione esponenziale è continua in $\mathbb{R}$ ed il logaritmo continuo in $(0, +\infty)$ e quindi studiare il solo comportamento della successione di funzioni ad esponente) suddividendo il problema in due regioni, $x \in [0, 1]$ e $x > 1$, poiché nella prima regione x^k tende a limiti finiti, a zero se $x < 1$ mentre il limite vale 1 se $x = 1$, invece nella seconda regione x^k tende all'infinito. Quindi, se $x \in [0, 1]$ si ha che l'esponente

$$\frac{1}{k}\log(1 + x^{2k}) \to 0, \quad k \to \infty\ ,$$

quindi la funzione limite vale 1 per $x \in [0, 1]$. Nella seconda regione possiamo invece manipolare l'esponente nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\log(1 + x^{2k}) &= \frac{1}{k}\log\left(x^{2k}\left(1 + \frac{1}{x^{2k}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{k}\log\left(x^{2k}\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2k}\right)\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\log x^{2k} + \log\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2k}\right)\right) \\
&= \frac{2k}{k}\log x + \frac{1}{k}\log\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2k}\right)
\end{aligned}$$

per cui il primo termine nel limite vale $2\log x$ mentre il secondo è zero. In conclusione, $f(x) = x^2$ per $x > 1$. Riassumendo, la successione f_k tende puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 \;, & |x| \leq 1 \;, \\ x^2 \;, & |x| > 1 \;. \end{cases}$$

Possiamo continuare a trattare le due regioni separatamente anche per la convergenza uniforme. Per $x \in [0, 1]$ si ha che la successione è crescente, infatti, eseguendo la derivata otteniamo

$$f_k'(x) = \frac{1}{k}(1 + x^{2k})^{1/k-1} \cdot 2kx^{2k-1}$$

che è positiva se $x > 0$. Quindi, l'estremo superiore è preso all'estremo superiore dell'intervallo, quindi

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - 1| = f_k(1) - 1 = \sqrt[k]{2} - 1 \;,$$

che tende a zero per $k \to \infty$. Quindi la successione converge uniformemente in $[-1, 1]$ per il criterio di Weierstrass.

Nella seconda regione invece, dobbiamo studiare

$$\sup_{x>1} |\sqrt[k]{1 + x^{2k}} - x^2| \equiv \sup_{t>1} |\sqrt[k]{1 + t^k} - t| \;, \qquad \text{ponendo } t = x^2 \;.$$

Eseguendo la derivata dell'argomento (chiamiamolo $g(t)$) dell'estremo superiore si ha (la prima derivata è stata già eseguita in precedenza)

$$g'(t) = \frac{1}{k}(1 + t^k)^{1/k-1}kt^{k-1} - 1 = \frac{t^{k-1} - (1 + t^k)^{1-1/k}}{(1 + t^k)^{1-1/k}} \;.$$

Imponendo la positività di questa relazione si ha che

$$g'(t) \geq 0 \iff t^{k-1} - (1 + t^k)^{1-1/k} \geq 0 \iff t \geq (1 + t^k)^{1/k} \iff t^k \geq 1 + t^k \;,$$

e l'ultima affermazione è certamente falsa, quindi $g'(t) < 0$ per $t > 1$ per cui la funzione argomento dell'estremo superiore è strettamente decrescente e quindi l'estremo superiore si ottiene all'estremo inferiore di $t > 1$ e si trova

$$\sup_{t>1} |\sqrt[k]{1 + t^k} - t| = \sqrt[k]{2} - 1 \;,$$

che ancora una volta tenderà a zero per $k \to \infty$. Quindi si ha nuovamente convergenza uniforme anche per $|x| > 1$ sempre per il criterio di Weierstrass, ossia la successione converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$.

(B) Ponendo $t = x + 4$ abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^k\sqrt{k+1}} \;,$$

per cui il raggio di convergenza della serie è, tramite il criterio del confronto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{k+1}\sqrt{k+1+1}}}{\frac{1}{2^k\sqrt{k+1}}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2^k\sqrt{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{k+2}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k+1}{k+2}} \\
&= \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

per cui $R = 2$, quindi la serie converge puntualmente per $t \in (-2, 2)$ ossia, rimettendo il cambiamento di variabili, converge per $x \in (-6, -2)$. Nel punto $x = -2$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

che chiaramente diverge all'infinito. Nel punto $x = -6$ la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

che però ora converge per il criterio di Leibniz delle serie a termine alterni. Ne consegue che la serie originaria converge nell'intervallo semiaperto $[-6, -2)$ ed uniformemente in tutti i compatti contenuti all'interno di detto intervallo e tali compatti potranno avere come estremo il punto -6 perchè la serie converge anche in quel punto (Teorema di Abel).

Analisi Matematica II		6 aprile 2017
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

3. (10 punti) Si consideri la funzione periodica f di periodo 2π definita dalla periodicizzazione della funzione

$$g(x) = \begin{cases} x\sin x \ , & x \in [0,\pi] \ , \\ -x\sin x \ , & x \in (-\pi, 0) \ . \end{cases}$$

Si determini la serie di Fourier e si discutano le eventuali convergenze puntuale ed uniforme della stessa. Infine, si determini il valore della seguente serie numerica

$$\sum_{p \text{ dispari}} (-1)^{(p-1)/2} \frac{p}{(4p^2-1)^2} \ .$$

La funzione f è certamente continua in $\mathbb{R}$ quindi appartiene a $GC^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ (chiaramente si ha $f \equiv \mathrm{pv}(f)$) e dunque la sua serie di Fourier converge puntualmente in $\mathbb{R}$ per il Teorema di Dirichlet. Studiamone la regolarità: la funzione è certamente derivabile nei punti interni a ciascun intervallo $[0,\pi]$ e $(-\pi,0)$, i problemi potrebbero sorgere solo nei punti di giunzione della periodicizzazione ossia $x=0$ e $x=\pm k\pi$ con $k\in\mathbb{N}$. Nell'origine si ha facilmente che

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \ ,$$

quindi la derivata esiste ed è nulla in zero. Per gli altri punti si ha invece

$$f'_-(k\pi) = \lim_{x\to(k\pi)^-}(\sin x - x\cos x) = k\pi \ , \qquad f'_+(k\pi) = \lim_{x\to(k\pi)^+}(-\sin x + x\cos x) = -k\pi \ ,$$

quindi le derivate destra e sinistra esistono nei punti $x = k\pi$ e sono diverse, mentre

$$f'_-(-k\pi) = \lim_{x\to(-k\pi)^-}(\sin x - x\cos x) = -k\pi \ , \qquad f'_+(-k\pi) = \lim_{x\to(-k\pi)^+}(-\sin x + x\cos x) = k\pi \ ,$$

e nuovamente le derivate destre e sinistre esistono nei punti $x = -k\pi$ e sono diverse. In conclusione la funzione f è derivabile a tratti e quindi appartiene a $GC^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, ed essendo continua allora vale il Teorema di Weierstrass sulla convergenza uniforme in $\mathbb{R}$ della sua serie di Fourier.

Passiamo ora al calcolo dei coefficienti di Fourier per f. La funzione f è dispari quindi $c_0(f)=0$ e $a_k(f)=0$ per $k\in\mathbb{N}$. Dobbiamo calcolare i soli coefficienti $b_k(f)$ con $k\in\mathbb{N}$. Procediamo al calcolo

$$b_k(f) = \frac{2}{2T}\int_0^{T/2} x\sin x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\cos(k-1)x - \cos(k+1)x)\,dx \ ,$$

dove, nel terzo integrale abbiamo fatto uso della formula di Werner per il prodotto dei seni. La formula fornisce i coefficienti per $k \geq 2$, per $k = 1$ dobbiamo calcolarla esplicitamente e si ha

$$b_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[x\sin(2x)\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx}_{=0}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Procediamo al calcolo dei coefficienti per $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\cos(k-1)x - \cos(k+1)x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x\sin(k-1)x}{k-1}\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(k-1)x}{k-1}\,dx - \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x\sin(k+1)x}{k+1}\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\cos(k-1)x}{(k-1)^2}\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\cos(k+1)x}{(k+1)^2}\,dx\ , \qquad \text{poiché } \sin\alpha x\,dx = -\frac{d(\cos\alpha x)}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(k-1)x}{(k-1)^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[\frac{\cos(k+1)x}{(k+1)^2}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(k-1)\pi - 1}{(k-1)^2} - \frac{\cos(k+1)\pi - 1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1} - 1}{(k-1)^2} - \frac{(-1)^{k+1} - 1}{(k+1)^2}\right)\ , \qquad \text{notare che } (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}(-1)^2 = (-1)^{k-1} \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-1)^{k+1} - 1\right)\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\ .
\end{aligned}$$

È ora chiaro che, a causa del primo termine, i coefficienti di indice dispari, ossia per $k = 2p+1$, hanno $b_{2p+1}(f) = 0$ ($p \in \mathbb{N}$), mentre quelli con indici pari $k = 2p$ sono diversi da zero e valgono

$$b_{2p}(f) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(2p-1)^2} - \frac{1}{(2p+1)^2}\right) = -\frac{16}{\pi}\frac{p}{(4p^2-1)^2}\ .$$

La serie di Fourier si scrive quindi (notando che la sua somma è proprio la funzione f come si deduce dalla validità del Teorema di Dirichlet stabilito prima)

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{16}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p}{(4p^2-1)^2}\,\sin(2px)\ .$$

Per calcolare la somma della serie numerica, a parte la sommatoria sui p dispari, notiamo che contiene un termine in più rispetto alla somma di Fourier, ossia il segno $(-1)^{(p-1)/2}$. Ora, per ottenere questo termine l'unico modo semplice è quello di porre $x = \pi/4$ col quale si ottiene che $\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$ per p dispari e poiché $f(\pi/4) = \sqrt{2}\pi/8$ dunque si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{8}\pi &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{16}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p}{(4p^2-1)^2}\sin\left(2p\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \frac{16}{\pi}\sum_{p \text{ dispari}}(-1)^{(p-1)/2}\frac{p}{(4p^2-1)^2}\ , \qquad \text{poiché } \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\ .
\end{aligned}$$

Riordinando i termini numerici si ottiene

$$\sum_{p \text{ dispari}} (-1)^{(p-1)/2} \frac{p}{(4p^2-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{128}\pi^2 \ .$$