Analisi Matematica II		9 Luglio 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. (10 punti) Studiare continuità, derivabilità (parziale e direzionale, secondo ogni direzione) e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\cos(x+y)^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Osserviamo che in $(0,0)$ f non è continua separatamente rispetto ad x (né rispetto ad y) essendo

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x,0) = \lim_{y \to 0^{\pm}} f(0,y) = \pm\infty.$$

Ne consegue che in $(0,0)$ f non è continua, non è derivabile (rispetto alla direzioni degli assi cartesiani) né differenziabile.

Dal punto di vista della derivazione direzionale nell'originale, per tutte le altre direzioni rimanenti, fissiamo un generico versore $v(v_1,v_2)$ tale che $\|v\| = 1$, con $v \neq (\pm1,0)$ e $v \neq (0,\pm1)$. Si ha che

$$\lim_{t\to0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{(v_1+v_2)\cos(tv_1+tv_2)^2}{t^2(v_1^2+v_2^2)} = \begin{cases} +\infty\,\mathrm{sgn}(v_1+v_2) & ,v_1+v_2 \neq 0 \\ 0 & ,v_1+v_2 = 0 \end{cases} .$$

Ne consegue che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \text{ se } v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ oppure } v = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

In tutte le altre direzioni f non è derivabile direzionalmente nell'origine.

In $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ f è invece continua, essendo composizione di funzioni continue. Si ha inoltre che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cos(x+y)^2 - 2(x+y)^2(x^2+y^2)\sin(x+y)^2 - 2x(x+y)\cos(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cos(x+y)^2 - 2(x+y)^2(x^2+y^2)\sin(x+y)^2 - 2y(x+y)\cos(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ne consegue, per i teoremi noti, che f è differenziabile e derivabile rispetto ogni direzione in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Analisi Matematica II		9 Luglio 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

2. (7 punti) Determinare estremali locali e globali della funzione

$$f(x, y) = \sinh(x^2 + y^2 - xy)\ .$$

L'esercizio si può svolgere in due modi: il primo è diretto e si usa il fatto che la derivata del seno iperbolico è il coseno iperbolico che come funzione non è mai nulla, per cui nell'annullamento del gradiente solo la parte polinomiale delle derivate parziali dell'argomento del seno iperbolico contano, ossia $(2x - y, 2y - x) = 0$ che ha come soluzione solamente il punto $(0, 0)$. Un modo meno diretto ma più interessante è il seguente: la funzione seno iperbolico è strettamente crescente e la sua derivata non si annulla mai quindi i punti di massimo e minimo di f coincidono con quelli dell'argomento $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ e le due funzioni presentano i medesimi punti critici.
Il gradiente $\nabla F(x, y) = (2x - y, 2y - x)$ si annulla solamente in $(0, 0)$, come nel primo metodo, e la matrice hessiana è:

$$HF(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$HF(0, 0)$ è definita positiva e quindi l'origine è punto di minimo.
Osservando che $\lim_{x\to+\infty} F(x, 0) = +\infty$ possiamo concludere che F, così come f, non ammette massimo su $\mathbf{R}^2$. Mentre osservando che $F(x, y) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$, si può concludere che $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto e $\min_{\mathbf{R}^2} f = 0$.

Analisi Matematica II		9 Luglio 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

3. (5 punti) Siano ω la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left(3x^2 + \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\right)\,dx + \left(2y^5 + \frac{1}{1+x^2}\right)\,dy\ ,$$

e A la regione del piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1+x^2 \le y \le 2, x \ge 0\}\ .$$

(a) Dire se ω è esatta e/o chiusa nel suo dominio di definizione.

(b) Calcolare $\int_{\partial^+ A} \omega$.

(a) Il dominio di definizione della forma differenziale ω è tutto $\mathbf{R}^2$. In esso si vede facilmente che la forma ω non è chiusa, quindi nemmeno esatta, infatti, eseguendo le derivate si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2y^5 + \frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \neq 0\ .$$

(b) Poiché la forma differenziale ω non è né chiusa né esatta il calcolo dell'integrale curvilineo è possibile affrontarlo in almeno due modi differenti, direttamente con la parametrizzazione della curva e uso diretto dell'integrale definente l'integrale delle forme sulle curve, oppure usando, molto più semplicemente, il Teorema di Gauss-Green. Usiamo quindi quest'ultima possibilità:

$$\int_{\partial^+ A} \omega = \int_A \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dxdy = \int_0^1 \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx \int_{1+x^2}^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{4x}{1+x^2} - \frac{8x}{(1+x^2)^2}\right) dx$$

$$= \left[2\log(1+x^2) + \frac{4}{1+x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = -2 + \log 4\ .$$

4. (8 punti) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int_\Omega \left(e^z + \frac{2y}{1+x^2+y^2} + x - 1 \right) dV \ ,$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Si nota dapprima che il dominio di integrazione Ω è invariante rispetto alle trasformazioni $y \to -y$ e $x \to 2-x$. La funzione integranda presenta il secondo e terzo termine dispari rispetto alle trasformazioni di cui sopra, il secondo termine per $y \to -y$ ed il terzo per $x \to 2-x$, quindi tutto l'integrale diventa, più banalmente

$$\int_\Omega \left(e^z + \frac{2y}{1+x^2+y^2} + x - 1 \right) dV = \int_\Omega e^z \, dV \ .$$

Il calcolo ora è routine cambiando, ad esempio, variabili usando coordinate sfriche adattate al centro dell sfera definente il dominio di integrazione Ω, ossia $x = 1+\rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$, da cui,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^z \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{\rho\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho \left(\int_0^\pi e^{\rho\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho [-e^{\rho\cos\phi}]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \, d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho (e^\rho - e^{-\rho}) \, d\rho \\
&= 4\pi \int_0^1 \rho \sinh\rho \, d\rho = 4\pi [\rho(\cosh\rho - \sinh\rho)]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi}{e} \ .
\end{aligned}$$