Analisi Matematica II		28 Agosto 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. (10 punti) Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y - \arctan(x-2)}{x^2 - 4x + y^2 + 4} & ,(x,y) \neq (2,0) \\ 0 & ,(x,y) = (2,0)\ . \end{cases}$$

Calcolare successivamente l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

lungo la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove:

- γ_1 è l'ellisse di equazione cartesiana $x^2 + 3y^2 = 9$;
- γ_2 è la curva di equazioni parametriche $\gamma_2(t) = (2t^2, t)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$.

Dallo studio della continuità separata è possibile osservare che f non è né continua, né derivabile, né differenziabile nel punto $(2,0)$, essendo

- $\lim_{x \to 0} f(x,0) = \nexists$
- $\lim_{y \to 0} f(0,y) = \nexists$

In tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ f risulta essere continua, essendo composizione di funzioni continue. Dallo studio delle derivate parziali, otteniamo che

- $f_x(x,y) = -\dfrac{\frac{(x-2)^2+y^2}{1+(x-2)^2} + 2(x-2)(3y - \arctan(x-2))}{(x^2 - 4x + y^2 + 4)^2}$
- $f_y(x,y) = \dfrac{3((x-2)^2 + y^2) - 2y(3y - \arctan(x-2))}{(x^2 - 4x + y^2 + 4)^2}$

Ne consegue che $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\})$ ed è ivi differenziabile.

Osservando che il punto $(2,0)$ non appartiene alla curva γ, che la curva γ_1 è chiusa e che la forma ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$, ne consegue che

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_2} \omega = f(\gamma_2(\sqrt{2})) - f(\gamma_2(0)) = f(4, \sqrt{2}) - f(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{12} \arctan 2\ ,$$

essendo per costruzione f una primitiva di ω, γ_2 regolare il cui sostegno è contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$.

Analisi Matematica II		28 Agosto 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

2. (10 punti) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = |xy|(x + y + 4),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

studiarne i punti di massimo e minimo (relativi e assoluti) in $\mathbb{R}^2$.

Si osserva immediatamente che

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y + xy^2 + 4xy & , xy \geq 0 \\ -(x^2y + xy^2 + 4xy) & , xy < 0 \end{cases} .$$

Osserviamo subito che lungo gli assi cartesiani f non è derivabile e che quindi in tali punti lo studio dei punti critici andrà fatto a parte, mentre altrove $f \in C^\infty(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\})$.

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y(2x + y + 4) & , xy > 0 \\ -y(2x + y + 4) & , xy < 0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} x(x + 2y + 4) & , xy > 0 \\ -x(x + 2y + 4) & , xy < 0 \end{cases} .$$

Osservando poi che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ solamente in $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ e che in tale punto il determinante della matrice Hessiana è $\frac{48}{9} > 0$ e che $f_{xx}(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = -\frac{8}{3} < 0$, ne consegue che il punto $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ è un punto di massimo relativo.

Procediamo studiando i punti critici lungo gli assi cartesiani. Osserviamo in primo luogo che $f(x, y) = 0$ lungo gli assi e che $f(x, y) \geq 0$ per ogni $y \geq -(x + 4)$.
Ne consegue che i punti dell'asse x $P(x_P, 0)$ sono punti di minimo relativo se $x_P > -4$, mentre sono punti di massimo relativo se $x_P < -4$. Il punto $(-4, 0)$ risulta invece essere un punto di sella.
Analogamente lungo l'asse y i punti $Q(0, y_Q)$ sono punti di minimo relativo se $y_Q > -4$, mentre sono punti di massimo relativo se $y_Q < -4$. Il punto $(0, -4)$ è nuovamente un punto di sella.

Concludiamo osservando che f non può avere massimi e minimi assoluti essendo, ad esempio, $f(x, x) = x^2(2x + 4)$ non limitata né superiormente né inferiormente.

Analisi Matematica II		28 Agosto 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

3. (5 punti) Si calcoli la lunghezza della curva γ determinata dalla seguente rappresentazione polare:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \ , \qquad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Facoltativo: Che curva si ottiene?

Possiamo svolgere l'esercizio in almeno due modi differenti, il primo dei quali estremamente semplice e che fornisce in modo chiaro che tipo di curva si ottiene:

1. La funzione $\rho(\theta)$ fornisce la rappresentazione delle coordinate cartesiane in polari tramite $x = \rho(\theta)\cos\theta$ e $y = \rho(\theta)\sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, per cui ne consegue facilmente che $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-1, 1]$. Notiamo ora che

$$|x| + |y| = \frac{|\cos\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} + \frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} = 1 \ ,$$

   per cui la curva non è altro che la rappresentazione polare del quadrato di lato $\sqrt{2}$ centrato nell'origine e ruotato di $\pi/4$. Da questo è ovvio che la sua lunghezza è $4\sqrt{2}$.

2. Il secondo modo utilizza la rappresentazione della lunghezza di una curva regolare a pezzi in rappresentazione polare. In effetti la funzione ρ ha nei punti $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ delle singolarità poiché le funzioni seno e coseno cambiano segno in corrispondenza di essi (seno in 0 e π, coseno in $\pi/2$ e $3\pi/2$) e vista la presenza del valore assoluto la funzione non è derivabile in quei punti. Possiamo però considerarla come una curva regolare a pezzi limitandoci ai 4 intervalli di ampiezza $\pi/2$ che compongono l'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ottiene che, in $[0, \pi/2]$, vale $\rho(\theta) = 1/(\cos\theta + \sin\theta)$, mentre se $\theta \in [\pi/2, \pi]$ possiamo scrivere che $\theta = \pi/2 + \alpha$ con $\alpha \in [0, \pi/2]$ e verificare che $\rho(\pi/2 + \alpha) = 1/(\sin\alpha + \cos\alpha) = \rho(\alpha)$, ossia, la stessa funzione nel caso precedente. È facile adesso vedere, usando la stessa strategia appena descritta, che anche negli altri due intervalli ($[\pi, 3\pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$) si ottiene sempre la stessa funzione di angolo variabile sempre in $[0, \pi/2]$, per cui si ottiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + (\rho(\theta)')^2}\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} + \frac{(\cos\theta - \sin\theta)^2}{(\cos\theta + \sin\theta)^4}}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{2}{(\cos\theta + \sin\theta)^4}}\, d\theta = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}\, d\theta \ , \end{aligned}$$

per cui è sufficiente dimostrare, visto il punto precedente, che

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}\, d\theta = 1 \ .$$

Una primitiva per la funzione integranda è

$$g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \ ,$$

infatti,

$$\frac{d}{d\theta} g(\theta) = \frac{\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - \sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \frac{1}{(\sin\theta + \cos\theta)^2}$$

per cui

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}\, d\theta = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = 1 \ ,$$

come volevasi dimostrare.

Analisi Matematica II		28 Agosto 2019
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

4. (5 punti) Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale $F(x,y,z) = x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 - 3z\sqrt{x^2+y^2}\vec{e}_3$ dal dominio $D = [0,1]^3$.

È possibile applicare il Teorema della Divergenza vedendo la frontiera S del cubo D come una superficie regolare a pezzi, per cui da $\operatorname{div}(\vec{F})(x,y,z) = 3(1-\sqrt{x^2+y^2})$ si ottiene

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 3\int_D (1-\sqrt{x^2+y^2})\, dV\ .$$

Poiché il volume del cubo è 1 si ha

$$\int_D (1-\sqrt{x^2+y^2})\, dV = 1 - 2\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy\ ,$$

dove $A = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$. Passando a coordinate polari si ottiene

$$\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} \rho^2\, d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sec\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{(1-x^2)^2}\, dx\ .$$

Dalla decomposizione in frazioni

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}\ ,$$

si ottiene, con integrazioni elementari,

$$\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{(1-x^2)^2}\, dx = \frac{1}{4}\left[-\log|x-1| - \frac{1}{x-1} + \log|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2x}{1-x^2} - \log\frac{|x-1|}{|x+1|}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$
$$= \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} - \log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right]\ ,$$

da cui, finalmente,

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 3-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log(3-2\sqrt{2})\ .$$