1 Topologia e spazi metrici

Definizione 1.1 Sia $\mathscr{T}$ una famiglia di insiemi contenuti in un insieme X, $\mathscr{T}$ è una topologia se

P.1 $\emptyset \in \mathscr{T}$ e $X \in \mathscr{T}$
P.2 Unione arbitraria di elementi di $\mathscr{T}$ appartiene a $\mathscr{T}$: $\bigcup A \in \mathscr{T} \ \forall \ A \in \mathscr{T}$
P.3 Intersezione di due elementi di $\mathscr{T}$ appartiene a $\mathscr{T}$: $A \cap B \in \mathscr{T} \ \forall \ A, B \in \mathscr{T}$

Un generico elemento di $\mathscr{T}$ è detto **aperto**, un insieme $B \subseteq X$ è detto **chiuso** se esiste un insieme $A \in \mathscr{T}$ tale che $B = X \backslash A$.

Definizione 2.2 Sia $\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale reale n-dimensionale, una norma $|| \cdot ||$ è un applicazione

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto ||v||$$

tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte

P.1 $\forall \ v \in \mathbb{R}^n \ ||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \iff v = \mathbf{0}$
P.2 $\forall \ v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R} \ ||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
P.3 $\forall \ v, w \in \mathbb{R}^n \ ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Siano ora $|| \cdot ||^{(1)}$ e $|| \cdot ||^{(2)}$ due norme di $\mathbb{R}^n$, diremo che tali norme sono equivalenti se esistono due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\forall \ v \in \mathbb{R}$

$$A||v||^{(1)} \leq ||v||^{(2)} \leq B||v||^{(1)}$$

Osservazione 1.1 Sia $|| \cdot ||_p$ l'applicazione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ così definita:

$$\text{Sia } v \in \mathbb{R}^n : v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \Longrightarrow ||v||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p}$$

L'applicazione $|| \cdot ||_p$ è una metrica per ogni $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Infatti, verificare $P.1$ e $P.2$ è banale, la proprietà $P.3$ segue dalla disuguaglianza di Minkowsky.

Definizione 1.3 Sia X un'insieme,una metrica $d(\cdot, \cdot)$ è un applicazione

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte

P.1 $\forall \ x, y \in X \ d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$
P.2 $\forall \ x, y \in X \ d(x, y) = d(y, x)$
P.3 $\forall \ x, y, z \in X \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

La coppia (X, d) è detta spazio metrico.

Osservazione 1.2 Data l'applicazione $||\cdot||_p$ precedentemente definita, l'applicazione $d(\cdot, \cdot)_{||\cdot||}$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto d_{||\cdot||}(v, w) = ||v - w||_p$$

è una metrica ed è detta **metrica indotta dalla norma** $|| \cdot ||_p$

Definizione 1.4 Sia (X,d) spazio metrico, un insieme $A \subset X$ è detto **aperto** se $\forall\ x \in A\ \exists\ \rho > 0 : B(x, \rho) \doteq \{y \in X : d(x, y) < \rho\} \subset X$. Un insieme $B \subset X$ è detto **chiuso** se esiste $A \subset X$ tale che $B = X \backslash A$.

Osservazione 1.3 La definizione di aperti e chiusi nella (1.4) costruisce una topologia dell'insieme X detta **topologia indotta dalla metrica** che è l'insieme di tutte le unioni arbitrarie di ogni insieme del tipo $B(x, \rho) \subset X$.

$$\mathscr{T}_d = \{\bigcup B(x, \rho) : x \in X \text{ e } \rho \in (0, +\infty)\} \cup \emptyset$$

$\mathscr{T}_d$ è effettivamente una topologia, infatti:

P.1 è ovvia, $\emptyset \in \mathscr{T}_d$ per definizione, inoltre $\forall\ x \in X$ esiste una palla aperta $B(y, r)$ tale che $x \in B(y, r)$, ovvero $X \subset \mathscr{T}_d$.
P.2 Sia $B = \bigcup A : A \in \mathscr{T}_d$ B appartiene a $\mathscr{T}_d$ perchè è unione arbitraria di palle aperte in X.
P.3 Siano $A, B \in \mathscr{T}_d$, preso $x \in A \cap B$ esistono r_1 e r_2 tali che $B(x, r_1) \subset A$ e $B(x, r_2) \subset B$, scelto $r = min\{r_1, r_2\}$ si ha che $B(x, r) \subset A$ e $B(x, r) \subset B$

Risulta immediato verificare che ciascun insieme del tipo $B(x, \rho)$ con $x \in X$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$ è un aperto della topologia $\mathscr{T}_d$. Infatti, $B(x, \rho) \in \mathscr{T}_d$ per definizione stessa di $\mathscr{T}_d$.

Definizione 1.5 Sia $A \subset X$, $x \in X$ è detto punto di accumulazione per A se qualsiasi intorno contenente x interseca A in almeno un punto diverso da x. L'insieme dei punti di accumulazione di A è detto insieme derivato di A.

$$\mathcal{D}A = A' \doteq \{x \in X : \forall\ \rho > 0,\ B(x, \rho) \cap A \neq \{x\} \wedge B(x, \rho) \cap A \neq \emptyset\}$$

Definizione 1.6 Sia $A \subset X$, viene detto interno di A o insieme dei punti interni di A l'insieme

$$int(A) = \mathring{A} \doteq \bigcup \{G \subset X : G \text{ è aperto e } G \subseteq A\}$$

Proposizione 1.1 $\mathring{A}$ essendo unione di aperti è un aperto di X. Vale inolte che

$$\mathring{A} = \{x \in X : \exists\ \rho > 0 : B(x, \rho) \subseteq A\}$$

Dimostrazione:
$(\subset)$
$x \in X \Rightarrow \exists\ G \subseteq A : G$ è aperto e $x \in G$, dato che G è aperto $\exists\ r > 0 : B(x, r) \subseteq G \subseteq A$
$(\supset)$
$x \in \{x \in X : \exists\ \rho > 0 : B(x, \rho) \subseteq A\} \Rightarrow$ esiste una palla aperta centrata in x interamente contenuta in A ovvero $x \in \mathring{A}$ unione degli aperti contenuti in A.

Definizione 1.7 Sia $A \subset X$, viene detto chiusura di A l'insieme

$$cl(A) = \bar{A} \doteq \bigcap \{G \subset X : G \text{ è chiuso e } G \supseteq A\}$$

Si noti che $\bar{A}$ è un chiuso dello spazio topologico $(X, \mathscr{T}_d)$

Proposizione 1.2 Sia $A \subset X$, allora vale che la chiusura di A coincide con l'unione di A e del suo derivato.

$$\bar{A} = A \cup \mathcal{D}A$$

Definizione 1.8 Sia $A \subset X$, viene detto frontiera di A l'insieme

$$fr(A) = \partial A \doteq cl(A) \cap cl(X \backslash A)$$

Proposizione 1.3 Sia $A \subset X$, allora vale che la frontiera di A coincide con l'insieme dei punti tali che per ogni palla aperta centrata in x, questa ha intersezione non vuota con A e il suo complementare.

$$fr(A) = \{x \in X : \forall\ \rho > 0\ B(x,\rho) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\rho) \cap X \backslash A \neq \emptyset\}$$

Dimostrazione:
($\subset$)
Sia $x \in cl(A) \cap cl(X \backslash A)$, se $x \in A$ allora ogni palla centrata in x contiene almeno un punto di A (x stesso), se $x \in \mathcal{D}A$ allora, per definizione, ogni palla centrata in x interseca A in almeno un punto. Con ragionamenti analoghi si giunge alle stesse conclusioni per $cl(X \backslash A)$.
($\supset$)
Sia $x \in fr(A)$ della Proposizione 1.3, siccome qualsiasi palla aperta centrata in x interseca A in almeno un punto, o $x \in A$ o $x \in \mathcal{D}A$, quindi $x \in cl(A)$. Analogamente si conclude che $x \in cl(X \backslash A)$

Proposizione 1.4 Sia $A \subset X$ spazio metrico, sono equivalenti le seguenti asserzioni:

1. A è un chiuso
2. $A = A \cup \partial A$
3. $A = A \cup \mathcal{D}A$
4. $A = \bar{A}$

Dimostrazione:
(1⇒2) Supponiamo che A sia un chiuso, sia per assurdo $x \in \partial A$ e $x \notin A$. Siccome $X \backslash A$ è aperto, per ogni $x \in X \backslash A$ è possibile trovare una palla aperta interamente contenuta in $X \backslash A$. Ciò però è assurdo dato che x è di frontiera e, per definizione, ogni palla centrata in x ha intersezione non vuota con A.
(2⇒3)
Sia $x \in A = A \cup \partial A$, se x è punto di accumulazione per A, o è un punto interno (e in tal caso $x \in A$) o è di frontiera e in tal caso appartiene comunque ad A, segue che $A = A \cup \mathcal{D}A$
(3⇒4)
Si può sfruttare la Proposizione 1.2 la quale implica che $cl(A) = A \cup \mathcal{D}A$
(3⇒1)
Sia $A = A \cup \mathcal{D}A$ e sia $x \notin A$, è sempre possibile trovare una palla aperta interamente contenuta in $X \backslash A$, altrimenti o x sarebbe di accumulazione per A o x sarebbe punto isolato di A.

Proposizione 1.5 Sia $A \subset X$ spazio metrico, $x \in \bar{A} \iff$ esiste una successione $\{x_n\} \subset A$ convergente a x.
Dimostrazione:
($\Rightarrow$)
Sia $x \in cl(A)$, se $x \in A$ sarà sufficiente considerare la successione $\{x_n\} = x\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, altrimenti, se $x \in \mathcal{D}A$, per ogni ϵ la palla aperta $B(x,\epsilon)$ interseca A in infiniti punti (tutti più "vicini" di ϵ a x)
($\Leftarrow$)
Sia x il limite della successione $\{x_n\} \subset A$, dobbiamo dimostrare che $x \in \bar{A}$. Sia per assurdo $x \in X \backslash A$, siccome $\bar{A}$ è un chiuso, deve esistere una palla aperta centrata in x totalmente contenuta in $X \backslash A$. Ma ciò è assurdo perchè vorrebbe dire che esiste un $\epsilon > 0$ tale che $d(x_n, x) > \epsilon\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Dalla proposizione segue che $A = \bar{A}$ ovvero A è un chiuso $\iff$ ogni $\{x_n\} \subset A$ è convergente a $x \in A$.

Definizione 1.8 Un'insieme $A \subset X$ spazio metrico è detto limitato se

$$diam(A) \doteq inf\{d(x,y) : x,y \in A\} < +\infty$$

Definizione 1.9 Sia (X, d) spazio metrico, una successione a valori in X è un applicazione

$$x_n : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \longmapsto x_n$$

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$ se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon) > 0 : d(x_n, \bar{x}) < \epsilon$ se $n > N$

Una sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K}$ di $\{x_n\}$ è data dalla composizione della successione x_n con un' applicazione k strettamente monotona (crescente) dai naturali a un sottoinsieme K dei naturali.

$$k : \mathbb{N} \longrightarrow K \subset \mathbb{N}$$

$$x_k = x_n \circ k : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \longmapsto x_{k(n)}$$

Teorema 1.1 (Teorema ponte) Sia $(\mathbb{R}^n, d_e)$ spazio metrico reale dotato della metrica euclidea. Una successione $\{x_n\} = \{(x_n^{(1)}, ..., x_n^{(n)})\} \subset \mathbb{R}^n$ è convergente a $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, ..., \bar{x}^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \iff \forall\ i \in \{1, ..., n\}\ \exists\ \bar{x}^{(i)} : x_n^{(i)} \to \bar{x}^{(i)}$ se $n \to +\infty$

Lemma 1.1 Una successione $\{x_n\}$ a valori in $\mathbb{R}$ ammette sempre una sottosuccessione monotona.

Dimostrazione:
Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, chiameremo *cresta della successione* qualsiasi elemento x_n della successione che rispetta la seguente condizione: $x_m < x_n\ \forall\ m > n$. Supponiamo che esista un insieme di indici $K \subset \mathbb{N}$ di cardinalità infinita interamente costituita dagli indici delle creste della successione $\{x_n\}$. In tale caso, siccome la successione ha infinite cresce, sarà sufficiente considerare la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K}$ monotona decrescente.
Supponiamo ora che $\{x_n\}$ abbia N creste, sia inoltre x_n l'N-esima cresta. Vorrà dire che esisterà un $m_0 > n$ tale per cui $x_{m_0} \geq x_n$, altrimenti x_n sarebbe una cresta. Nuovamente possiamo considerare x_m, siccome non è una cresta della successione, esisterà $m_1 > m_0$ tale per cui $x_{m_1} \geq m_{m_0}$. Iterando la procedura, si ottiene un insieme di indici $K = \{m_i\}_{i\in N}$ che costruisce la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K}$ monotona crescente.

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstraß) Una successione $\{x_n\}$ a valori in $\mathbb{R}$ limitata ammette sempre una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione:
Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, essa, per il Lemma 1.1, ammette una sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K}$ monotona. Supponiamo che essa sia crescente, essendo $\{x_n\}$ limitata per ipotesi, esiste il sup dell' insieme $\{x_k : k \in K\}$, sia quindi $L = sup\{x_k : k \in K\}$. Per definizione di estremo superiore (e sfurtando il fatto che $\{x_k\}$ è monotona crescente), si ha che $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon) > 0 : L - x_k < \epsilon\ \forall\ k > N(\epsilon) \wedge k \in K$

Definizione 1.10 Sia (X, d) spazio metrico, una successione $\{x_n\} \subset X$ è detta *di Cauchy* se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon) > 0 : n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$
Una successione $\{x_n\}$ convergente a $\bar{x} \in X$ è di Cauchy. Infatti $x_n \to \bar{x}$ per $n \to +\infty$ implica che $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, \bar{x}) + d(x_n, \bar{x}) < 2\epsilon$ se $n, m > N$

Definizione 1.11 Uno spazio metrico (X, d) è detto completo se comunque presa una successione $\{x_n\} \subset X$ di Cauchy essa converge ad un elemento di X stesso.

Teorema 1.3 (Teorema di Cantor) Sia (X, d) spazio metrico, sia $\{F_n\}$ successione di sottoinsiemi di X, ovvero $F_i \subset X\ \forall i \in \mathbb{N}$, con le seguenti proprietà:

1. F_n è un chiuso $\forall\ n \in \mathbb{N}$
2. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ... \supset F_n \supset ...$
3. $diam(F_n) \to 0$ se $n \to +\infty$

allora X è completo $\iff \bigcap F_n = \{x\}$

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$
Sia (X, d) spazio metrico completo, sia inoltre $\{F_n\}$ successione di sottoinsiemi con le 3 proprietà. Sfruttando la proprietà (3), si ha che $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N > 0 : diam(F_n) < \epsilon$ se $n > N$. Sia ora (per ciascun n) $x_n \in F_n$, scelti ora $m, n > N + 1$, per la (2), $x_m, x_n \in F_{N+1}$. Si ha conseguentemente che $d(x_n, x_m) < diam(F_{N+1})) < \epsilon$. Abbiamo dimostrato che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy. Ora sfruttiamo il fatto che X è completo, esiste quindi $x \in X$ tale per cui $\{x_n\}$ converge a x. Si noti ora che $\forall\ n > N$, $x_n \in F_N$. La successione $\{x_n\}$ è, pertanto, contenuta definitivamente in F_N. Essendo F_N un chiuso, il limite della successione x appartiene a F_N, per l'arbitrarietà di N si conclude che $x \in \bigcap F_n$. Sia ora $y \neq x \in \bigcap F_n$, allora si ha che $d(x, y) \leq diam(F_n) \to 0$ se $n \to +\infty$, ciò implica che $x = y$.
$(\Leftarrow)$
Sia ora $\{x_n\} \subset X$ successione di Cauchy, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ sia $F_n = cl(\{x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+i}, ...)\}$. Risulta evidente che F_n è chiuso e non vuoto $\forall\ n$, inoltre, vale la (2) siccome $F_n \supset F_{n+1}\ \forall\ n > 0$. Ora, fissato $\epsilon > 0$, $\exists\ N > 0 : d(x_n, x_m) < \epsilon$ se $n, m > 0$, ovvero $diam(F_N) < \epsilon$, vale quindi (3). Per ipotesi si ha che $\bigcap F_n = \{x\}$. Dato che $diam(F_n) \to 0 \Rightarrow d(x_n, x) \to 0$ se $n \to +\infty$.

Proposizione 1.6 Sia (X, d) uno spazio metrico completo, $Y \subset X$ è completo $\iff$ Y e chiuso.

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$
Sia $Y \subset X$ spazio metrico completo, sia $\{x_n\} \subset Y$ successione convergente. Una successione convergente è, in particolare, una successione di Cauchy. Siccome Y è completo, $\{x_n\}$ converge a $x \in Y$, dalla Proprosizione 1.5, Y è un chiuso.
$(\Leftarrow)$
Sia $Y \subset X$ un insieme chiuso e X completo. Consideriamo una successione $\{x_n\} \subset Y \subset X$ di Cauchy, essa, per ipotesi, converge ad un elemento $x \in X$. Ma allora, dato che Y è chiuso, $x \in Y$, ovvero Y è completo.

Definizione 1.12 Sia $E \subset (X, d)$ spazio metrico, una collezione $\mathscr{F}$ di insiemi di X si dice ricoprimento aperto di E se $E \subseteq \bigcup\{F \in \mathscr{F}\}$ con $F \in \mathscr{F}$ un aperto di X.
Un'insieme $E \subseteq X$ è detto compatto per ricoprimenti se da ogni ricoprimento di E è possibile estrarre un sottoricoprimento costituito da un numero finito di insiemi.

Definizione 1.13 Sia $E \subseteq (X, d)$, E viene detto compatto per successioni se da qualsiasi successione $\{x_n\} \subset E$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in E.

Teorema 1.4 Sia $E \subseteq (X, d)$ spazio metrico

$$E \text{ è compatto per successioni} \iff E \text{ è compatto per ricoprimenti.}$$

Pezzo di dimostrazione:
$(\Leftarrow)$
Sia $E \subseteq X$ insieme compatto per ricoprimenti. Sia per assurdo $\{x_n\}$ una successione dalla quale non è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Sia ora $x \in E$, deve esistere un numero reale $r > 0$ tale che $B(x, r)$ contiene al più un numero finito di punti della successione $\{x_n\}$. Consideriamo, al variare di $x \in E$, l'insieme $\{B(x, r(x))\}$, esso costituisce un ricoprimento aperto di E. Da questo risulta però impossibile estrarre un sottoricoprimento finito dato che esso conterrebbe un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}$.

Proposizione 1.7 Sia $E \subseteq (X, d)$ compatto $\Longrightarrow E$ è chiuso e limitato.

Dimostrazione:
Sia $E \subseteq X$ compatto per successioni, dimostriamo che E è un chiuso di X. Sia $\{x_n\} \subset E$ successione convergente a $x \in X$, essa ammette una sottosuccessione convergente in E compatto. La sottosuccessione e la successione hanno lo stesso limite $\bar{x}$ per il teorema di unicità del limite e quindi $x = \bar{x}$, abbiamo mostrato che una successione $\{x_n\}$ arbitraria contenuta in E converge ad un elemento di E. E è un chiuso di X. Sia ora E, per assurdo, illimitato. Scegliamo un $x \in E$ ad arbitrio e costruiamo la successione $\{x_n\} \subset E$ in questa maniera: $x_1 = x$, x_n è

un qualsiasi elemento tale che $d(x, x_n) \geq n$. Da tale successione è impossibile estrarre una sottosuccessione convergente.

Proposizione 1.8 Sia $E \subseteq X$ con X spazio metrico compatto, allora:

$$E \text{ chiuso} \Longrightarrow E \text{ compatto}$$

Dimostrazione:
Sia E un chiuso di X spazio metrico compatto, sia ora $\{x_n\} \subset E \subset X$ una successione. Siccome X è compatto, da essa è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_k\}$ convergente ad un elemento $x \in X$. Dato che E è un chiuso di X ogni successione contenuta in E e convergente ammette come limite un elemento appartenente a E. In particolare ciò implica che $x \in E$, abbiamo mostrato che una qualsiasi successione in E ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento di E.

Proposizione 1.9 Sia $E \subset X$ insieme compatto, allora E è completo

Dimostrazione:
Sia $\{x_n\} \subset E$ una successione di Cauchy. Siccome E è compatto esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ convergente, sia ξ il suo limite. Sfruttiamo ora la condizione di Cauchy, per ogni $\epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon) : d(x_n, x_m) < \epsilon$ se $n, m > N$. Ma allora

$$d(x_n, \xi) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \xi) < 2\epsilon$$

quando $n, n_k > N$.

Definizione 2.4 Un sottoinsieme $E \subseteq (X, d)$ si dice totalmente limitato se $\forall\ r > 0$ esistono $\{x_1, ..., x_n\}$ tali che $E \subseteq \bigcup_i B(x_i, r)$.

2 Funzioni tra spazi metrici

Definizione 2.1 Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici, f una funzione

$$f : A \subseteq X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto f(x)$$

f è una funzione continua se $\forall\ a \in X$ una qualsiasi successione $\{x_n\} \subset A$ convergente ad $a \Longrightarrow \{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$.
Equivalentemente: f è una funzione continua se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) > 0 : d(f(x), f(a)) < \epsilon$ se $d(x, a) < \delta$

Proposizione 2.1 Sia $f : A \subseteq (X, d_x) \longrightarrow (Y, d_y)$ una funzione tra spazi metrici, sono allora equivalenti

1. f è continua
2. $F \subseteq Im(f)$ aperto $\Rightarrow f^{-1}(F) \subseteq X$ è aperto
3. $G \subseteq Im(f)$ chiuso $\Rightarrow f^{-1}(G) \subseteq X$ è chiuso

Dimostrazione:
(1⇒2)
Sia f continua e $F \subseteq Im(f)$ un aperto. Sia ora $x \in f^{-1}(F)$, consideriamo ora $f(x) \in F$, siccome F è un aperto, esiste $\epsilon > 0 : B(f(x), \epsilon) \subseteq F$. Siccome f è funzione continua in x, per ogni $\epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(F)$, ovvero $\forall\ x \in f^{-1}(F)$ esiste una palla centrata in x interamente contenuta in $f^{-1}(F)$.
(2⇒1)
Sia $f(x) \in Im(f)$, $\epsilon > 0$ e $B(f(x), \epsilon) \subseteq Im(f)$ un aperto. Per ipotesi $f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subseteq A$ è un aperto e, inoltre, esso contiene x. Siccome $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ è aperto, esiste $\delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$, ovvero f è continua in x, per l'arbitrarietà di $x \in A$ essa è continua in tutto il suo insieme di definizione.
(2⇒3)
Sia $F \subseteq Im(f)$ un aperto. Consideriamo l'insieme $f^{-1}(Im(f) \backslash F)$, esso, per il principio di dualità, risulta essere uguale a $A \backslash f^{-1}(F)$. Per ipotesi però $f^{-1}(F)$ è un aperto e quindi $A \backslash f^{-1}(F) = f^{-1}(Im(f) \backslash F)$ è un chiuso. Abbiamo dimostrato che controimmagine di un chiuso è un chiuso.
(3⇒2)
Sia $F \subseteq Im(f)$ un chiuso. Consideriamo l'insieme $f^{-1}(Im(f) \backslash F) = A \backslash f^{-1}(F)$ per il principio di dualità. Per ipotesi $f^{-1}(F)$ è un chiuso $\Rightarrow A \backslash f^{-1}(F) = f^{-1}(Im(f) \backslash F)$ è un aperto. Abbiamo mostrato che controimmagine di aperti è un aperto.

Lemma 2.1 Sia (X, d) spazio metrico e $A \subseteq X$, si definisce la distanza di $x \in X$ da A come

$$dist(x, A) \doteq inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Ora, $\forall x, y \in X$ vale che $|dist(x, A) - dist(y, A)| \leq d(x, y)$.

Dimostrazione:
Siano $x, y \in X$ e $z \in A$, dalla disuguaglianza triangolare si ha che $d(z, y) \leq d(x, y) + d(z, x)$, da questa relazione discende che $|d(z, y) + d(z, x)| \leq d(x, y)$, passando all'$inf_{z \in A}$ si ottiene

$$|dist(x, A) - dist(y, A)| \leq d(x, y)$$

Proposizione 2.2 Sia (X, d) spazio metrico e $A \subseteq X$, allora

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto dist(x, A)$$

è una funzione continua.

Dimostrazione:
Possiamo sfruttare il lemma precedente che, applicato a questo caso specifico, asserisce che $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. In particolare, preso $y \in X$ e fissato $\epsilon > 0$ è sufficiente scegliere $\delta = \epsilon$ in modo che $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Lemma 2.2 (Urysohn) Siano $A, B \subseteq (X, d)$ due insiemi chiusi e disgiunti $\Rightarrow\ \exists\, f : X \to \mathbb{R}$ continua, inoltre

1. $f(x) \in [0, 1],\ \forall\, x \in X$
2. $f(x) = 0,\ \forall\, x \in A$
3. $f(x) = 1,\ \forall\, x \in B$

Dimostrazione:
Sia

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{dist(x, A)}{dist(x, A) + dist(x, B)}$$

risulta immediato verificare che valgono la (1), la (2) e la (3), inoltre f è continua in quanto rapporto di funzioni continue.

Corollario 2.1 Sia $F \subseteq (X, d)$ un chiuso e $G \supseteq F$ un aperto $\Longrightarrow$ esiste una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

1. $f(x) \in [0, 1], \forall\, x \in X$
2. $f(x) = 1$ se $x \in F$
3. $f(x) = 0$ se $x \notin G$

Lemma 2.3 Siano $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}^n$ due funzioni continue, la funzione $s : X \to \mathbb{R}$ tale che $s(x) = < f(X), g(x) >$ è una funzione continua.

Dimostrazione:
Sia $< \cdot, \cdot >_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare tale che $< x, y >_A = x^t A y$. In altri termini, dati $x = \sum_{i=1}^n e_i x_i$ e $y = \sum_{i=1}^n e_i y_i$, $< x, y >_A = \sum_{i,j} x_i y_i < e_i, e_j >_A = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$. Sia ora, per semplicità, $A = I_n$. Sia $a \in X$, dette ora $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$ le componenti delle funzioni f e g, fissato $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0 : |f_i(x)g_i(x) - f_i(a)g_i(a)| < \epsilon : i$ se $d(x, a) < \delta$ (per continuità di prodotto di funzioni continue). Sia ora

$$\left| \sum_i f_i(x)g_i(x) - \sum_i f_i(a)g_i(a) \right| \leq \sum_i |f_i(x)g_i(x) - f_i(a)g_i(a)| \leq n\epsilon$$

Definizione 2.2 Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici, $f : X \longrightarrow Y$ è uniformemente continua se $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d_y(f(x), f(y)) < \epsilon$ se $d_x(x, y) < \delta$ per ogni $x, y \in X$.

Definizione 2.3 Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici, $f : X \longrightarrow Y$ è *Lipschitziana* se esiste $M \in R$ tale che $d_y(f(x), f(y)) \leq M d_x(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Osservazione 2.1 Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione Lipschitziana $\Rightarrow$ f è uniformemente continua.

Infatti, fissato $\epsilon > 0$, per ipotesi, esiste $M > 0 : d_y(f(x), f(y)) \leq d_x(x, y)\ \forall\, x, y \in X$. Ponendo $d_x(x, y) = \epsilon/M$ si ha che $d_y(f(x), f(y)) \leq \epsilon\ \forall\, x, y \in X$.

Proposizione 2.3 Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione continua tra spazi metrici $\Rightarrow$ preso qualsiasi $A \subseteq X$ compatto si ha che $f(A) \subseteq Y$ è un compatto.

Dimostrazione:
Sia $f : X \longrightarrow Y$ funzione continua, sia $K \subseteq X$ un compatto. Considero l'insieme $f(K) \subseteq Y$ e considero un ricoprimento aperto di $f(K)$ dato dalla famiglia $\mathcal{U} = \{U \subseteq Y : U$ è aperto$\}$. Sia

ora $U \in \mathfrak{U}$, $f^{-1}(U)$ è un aperto di X siccome f è continua.
Consideriamo ora $\bigcup f^{-1}(U)$ è un ricoprimento aperto di K, siccome K è compatto, esistono N elementi $\{f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_N)\}$ tali che $K \subseteq \bigcup_i f^{-1}(U_i)$ da cui segue che $f(K) \subseteq \bigcup_i U_i$.

Teorema 2.1 (Weierstraß) Sia $f : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con X compatto, esistono allora $a, b \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b) \ \forall \ x \in X$.

Dimostrazione:
Essendo che X è un compatto, $f(X) \subset \mathbb{R}$ è pure un compatto per la Proposizione 2.2. Ma allora $f(X)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, devono perciò esistere due elementi $\alpha, \beta \in f(X)$ tali che $\alpha \leq f(x) \leq \beta$.

Proposizione 2.4 Siano $||\cdot||_a$ e $||\cdot||_b$ due norme dello spazio lineare $\mathbb{R}^n$, tali norme sono equivalenti.

Dimostrazione:
Mostriamo che una generica norma $||\cdot||_a$ è equivalente alla norma $||\cdot||_1$ introdotta nell'Osservazione 1.1. Consideriamo la norma $||\cdot||_a$, osserviamo che l'asserto è dimostrato se si prova l'equivalenza delle norme nella sfera di versori $S = \{v \in \mathbb{R}^n : ||v||_1 = 1\}$ in quanto, considerato un generico vettore $w = |w|\mathbf{v}$ con $||\mathbf{v}||_1 = 1$ si ha che se esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$A||\mathbf{v}||_a \leq ||\mathbf{v}||_1 \leq B||\mathbf{v}||_a$$

allora

$$|w|A||\mathbf{v}||_a \leq |w| \ ||\mathbf{v}||_1 \leq |w|B||\mathbf{v}||_a \Longleftrightarrow A||w||_a \leq ||w||_1 \leq B||w||_a$$

Consideriamo ora la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ||x||_a$, tale funzione è continua in S rispetto alla norma $||\cdot||_1$. Infatti, fissato $\epsilon > 0$ e $v \in S$, si ha che

$$|f(x) - f(v)| = | \ ||x||_a - ||v||_a \ | \leq ||x - v||_a = \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - v_i)e_i\right|\right|_a \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - v_i| \ ||e_i||_a \leq max\{|x_i - v_i|\} \sum_{i=1}^{n} ||e_i||_a \leq ||x - v||_1 \sum_{i=1}^{n} ||e_i||_a$$

Ponendo quindi $||x - v||_1 < \delta = \epsilon / \sum ||e_i||_a$ si ha la continuità di f. Consideriamo ora l'applicazione $g : S \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(x) = \frac{||x||_1}{||x||_a}$$

La funzione g è continua in S perchè rapporto di funzioni continue in tale insieme ($||\cdot||_1$ è continua rispetto a se stessa). Tale funzione è definita sull'insieme chiuso e limitato S, segue che S è un compatto. Per il Teorema 2.1, la funzione g ammette massimo e minimo in S. Esistono quindi due costanti $A, B \in \mathbb{R}^+$ tali che $\forall \ v \in S$

$$A \leq g(v) \leq B \Longleftrightarrow A||v||_a \leq ||v||_1 \leq B||v||_a$$

Le conclusione ottenute valgono per qualsiasi norma $||\cdot||$, in particolare valgono anche per $||\cdot||_b$, esistono dunque due costanti $C, D \in \mathbb{R}^+$ tali che per ogni $v \in S$

$$C||v||_b \leq ||v||_1 \leq D||v||_b$$

ma allora

$$C||v||_b \leq ||v||_1 \leq B||v_a|| \leq \frac{B}{A}||v||_1 \leq \frac{B}{A}D||v||_b$$

dalla quale si ha l'asserto

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstraß) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ una successione limitata, essa ammette sempre una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione:
Procediamo per induzione su n, sia $n = 1$. Questo caso è stato già dimostrato nel Teorema

1.2. Sia ora il Teorema 2.2 valido per $m = n - 1$. Sia ora $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ tale che un generico elemento della successione può essere scritto come $(x_k^{(1)}, ..., x_k^{m+1})$. Per ipotesi, sappiamo che è possibile estrarre dalle prime m componenti una sottosuccessione convergente, abbiamo quindi che esiste un insieme di indici $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ tale che le sottosuccessioni $\{x_{k\in\mathbb{N}'}^{(i)}\}$ convergono per ogni $i \leq m$. Per l'ultima coordinata estraiamo una sottosuccessione convergente data dagli indici dell'insieme $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}$, il che è possibile per il Teorema 1.2. A seconda che sia $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}''$ o il contrario, scegliamo l'insieme di indici più piccolo: ogni sottosuccessione i-esima ottenuta dalla componente i-esima usando quell'insieme di indici converge e quindi anche $\{x_{k\in\mathbb{N}' \text{o} \mathbb{N}''}\}$ converge.

Proposizione 2.5 (Heine-Borel) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato $\Longrightarrow X$ è compatto.

Dimostrazione:
Sia $\{x_n\} \subset X$, essa è contenuta in un insieme limitato, quindi, essa stessa è limitata. Per il Teorema 2.2, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ convergente. La sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ è convergente e contenuta nel chiuso X, dunque il limite della successione è contenuto in X. Da una successione $\{x_n\} \subset X$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di X.

Proposizione 2.6 Sia (X, d_x) spazio metrico compatto e $f : X \longrightarrow (Y, d_y)$ continua, allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione:
Sia, per assurdo, f non uniformemente continua. Ovvero $\exists\ \epsilon > 0 : \forall\ \delta > 0$ esistono $x, y \in X : d_x(x, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) > \epsilon$. Poniamo $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. Considero $x, y \in X$ con $d_x(x, y) < 1/n$ per cui $d_y(f(x), f(y)) > \epsilon$. Al variare di $n \in \mathbb{N}$, trovo x_n e y_n che soddisfino la relazione precedente. Le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono a valori in X che è compatto. Da queste successioni è dunque possibile estrarre due sottotuccessioni $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$ convergenti a due elementi $x, y \in X$. Ma per ipotesi $d_x(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$ se $k \to +\infty$ quindi $x = y$. Per la continuità di f si ha inoltre che $d_y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to d_y(f(x), f(y) = 0$ se $k \to +\infty$.

Definizione 2.4 Siano (X, d_x) e (Y, d_y) spazi metrici e $f : X \longrightarrow Y$. La mappa f è detta *omeomorfismo* se è continua e bigettiva e f^{-1} è continua.

3 Differenziabilità in spazi metrici

Definizione 3.1 Sia $\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, diremo che γ è differenziabile in $x \in (a,b)$ se

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(x+t)-\gamma(x)}{t} \quad \text{esiste finito}$$

nel caso in cui ciò è verificato, chiamiamo $\gamma'(x) \in \mathbb{R}^n$ la derivata di γ in x. Diremo che γ è differenziabile se $\gamma'(x)$ esiste $\forall\, x \in (a,b)$. In tale caso si costruisce una funzione $\gamma' : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ detta funzione differenziale o derivata di γ. Se γ' è continua in (a,b) si dice che γ è di classe $C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 3.1 Data $\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenziabile in $x \in (a,b)$, essa è anche continua in x.
Infatti, si ha che $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che

$$\left|\left| \frac{\gamma(x+t)-\gamma(x)}{t} - \gamma'(x) \right|\right|_{\mathbb{R}^n} \leq \epsilon \quad \text{se} \quad d(x+t,t) = |t| < \delta$$

Dalla precedente relazione è facile ricavare che

$$||\gamma(x+t)-\gamma(x)||_{\mathbb{R}^n} \leq \epsilon + |t|\ ||\gamma'(x)||_{\mathbb{R}^n} \quad \text{che è arbitrariamente vicino a 0}$$

Proposizione 3.1 Sia $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, essa è differenziabile in $x \in (a,b) \Leftrightarrow$ esistono una funzione $T : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ e un vettore $G \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{y\to x} T(y) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(y) - \gamma(x) = (y-x)(G+T(y))$$

in tale caso $G = \gamma'(x)$

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$
Sia γ differenziabile in x, sia $G = \gamma'(x)$ e sia $T : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x} - G & \text{se } y \neq x \\ 0 & \text{se} \end{cases}$$

risulta immediato osservare che si ha la tesi.
$(\Leftarrow)$
Esistano ora la funzione T e il vettore G tali che la relazione sopra riportata sia vera. In tale caso è sufficiente dividere per $y-x$ che è sempre diverso da 0 e si ha la tesi.

Proposizione 3.2 Siano $\gamma, \delta : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ due curve differenziabili in $\bar{x} \in (a,b)$, allora la funzione $s : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tale che $s(x) = \leq \delta(x), \gamma(x) \geq$ è differenziabile in x e, inoltre, vale che $s'(x) = <\gamma'(x), \delta(x)> \ + \ <\gamma(x), \delta'(x)>$.

Dimostrazione:
Scriviamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{t\to 0} \frac{s(x+t)-s(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{<\gamma(x+t)-\gamma(x), \delta(x+t)> + <\gamma(x), \delta(x+t)-\delta(x)>}{t}$$

$$\text{per continuità di s } = \lim_{t\to 0} < \frac{\gamma(x+t)-\gamma(x)}{t}, \delta(x+t) > + < \gamma(x), \frac{\delta(x+t)-\delta(x)}{t} >$$

dalla quale si ha la tesi.

Definizione 3.2 Sia $A = int(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$, sia inoltre $x \in A$ e $w \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Diremo che f è derivabile nella direzione w se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tw)-f(x)}{t} \quad \text{esiste finito}$$

in tal caso chiameremo questo limite *derivata direzionale di f lungo w* e lo indicheremo così $f_w(x)$ o $D_w f(x)$ o $\partial_w f(x)$.

Definizione 3.3 Sia $A = int(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, diremo che $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in $x \in A$ lungo la direzione i-esima se

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \quad \text{esiste finito}$$

in questo caso chiameremo tale limite derivata parziale di f nella direzione i-esima. Si indica solitamente così: $f_i(x)$ o $\partial_i f(x)$ o $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x)$.

Osservazione 3.2 Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia derivabile parzialmente in x lungo la direzione j, sia quindi $\partial_j f$ una funzione definita in un intorno di x. Se $\partial_j f$ è derivabile parzialmente lungo la direzione e_i allora f si dice due volte derivabile in x (prima rispetto a j e poi rispetto a i) e la sua derivata seconda in x si chiama derivata parziale mista e si indica così $f_{ij}(x)$ o $\partial_{ij} f(x)$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i e_j}$.

Proposizione 3.2 (Schwarz) Sia $f : A = int(A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte derivabile parzialmente in $\bar{x} \in A$ rispetto a i e j e rispetto a j e i. Se le derivate parziali seconde $\partial_{ij} f$, $\partial_{ji} f$ in $\bar{x}$ esistono e sono ivi continue $\Rightarrow \partial_{ij} f(\bar{x}) = \partial_{ji} f(\bar{x})$.

Dimostrazione:
Sia, per semplicità, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definiamo la grandezza

$$\Delta(h, k) = \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y} + k) + f(\bar{x} + \bar{y})}{hk} \quad \text{con } h, k > 0$$

Sia ora ϕ l'applicazione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ $y \longmapsto f(\bar{x} + h, y) - f(\bar{x}, y)$. Notiamo che ϕ è sicuramente continua nell'intervallo $[\bar{y}, \bar{y} + k]$ e differenziabile in $\bar{y}$, è dunque possibile applicare il *Teorema di Lagrange*. La grandezza $\Delta(h, k)$ può essere riscritta in termini di ϕ

$$\Delta(h, k) = \frac{\phi(\bar{y} + k) - \phi(\bar{y})}{hk} \quad \text{per il Teorema di Lagrange} = \frac{\phi'(\bar{y} + \theta k)}{h} \quad \text{con } \theta \in (0, 1)$$

$$= \frac{1}{h}(\partial_2 f(\bar{x} + h, \bar{y} + \theta k) - \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y} + \bar{y} + \theta k))$$

si noti che $\partial_2 f(\cdot, \bar{y} + \theta k)$ può essere considerata come una funzione della sola variabile x, continua nell'intervallo $[\bar{x}, \bar{x} + h]$ e differenziabile in $\bar{x}$. Si può sfruttare nuovamente il *Teorema del valor medio* per funzioni di variabile reale. Si ottiene

$$= \frac{1}{h}(\partial_2 f(\bar{x} + h, \bar{y} + \theta k) - \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y} + \theta k)) = \partial^2_{21} f(\bar{x} + \delta h, \bar{y} + \theta k) \quad \text{con } \delta \in (0, 1)$$

Si può ora passare al limite per $h, k \to 0$ dato che $\partial_{21} f$ è continua in $(\bar{x}, \bar{y})$, si ottiene che $\Delta(h, k) \to \partial^2_{21} f(\bar{x}, \bar{y})$ se $h, k \to 0$.
Si può ottenere analogamente che $\Delta(h, k) \to \partial^2_{12} f(\bar{x}, \bar{y})$ se $h, k \to 0$ ponendo ψ l'applicazione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che $x \longmapsto f(x, \bar{y} + k) - f(x, \bar{y})$.

Definizione 3.4 Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, T è una funzione lineare se
P.1 $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha che $T(x + y) = T(x) + T(y)$
P.2 $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\ a \in \mathbb{R}$ si ha che $T(ax) = aT(x)$
Una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detto funzionale lineare. L'insieme dei funzionali lineari in R^n è detto duale e si indica R^{n^*}.

Proposizione 3.3 Sia $e = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canonica di R^n, siano, per ogni $i \in \{1, ..., n\}$

$$L_i(e_j) = \delta_{ij} \Longrightarrow \{L_1, ..., L_n\} \text{ è una base del duale}$$

Dimostrazione:
(Indipendenza lineare)
Consideriamo la relazione $\sum \alpha_i L_i = 0_{\mathbb{R}^{n*}}$, dobbiamo dimostrare che ciò implica $\alpha_i = 0\ \forall\ i \in \{1, ..., n\}$. L'uguaglianza è verificata se e solo se $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$ vale che $\sum \alpha_i L_i(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Consideriamo i vettori $e_1, ..., e_n$, l'espressione valutata in ciascuno di questi vettori vale $0_{\mathbb{R}^n}$ se e solo se $\alpha_i = 0\ \forall\ i$.
(Generatori)

Sia $g \in \mathbb{R}^{n^*}$, sappiamo che una funzione lineare è univocamente determinata dai valore che assume quando valutata nei vettori della base. Siano quindi i numeri $\beta_i = g(e_i)$. Vogliamo mostrare che esistono dei coefficienti α_i tali che

$$g - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i \text{ coincida con la funzione identicamente nulla}$$

Poniamo $\alpha_i = \beta_i$, scegliamo arbitrariamente un vettore e_i della base e, valutiamo tale funzione in e_i, si ha che

$$g(e_i) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j L_j(e_i) = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_i \delta_{ij} = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Da tali considerazioni segue l'asserto.

Lemma 3.1(Riesz) Sia $L \in \mathbb{R}^{n^*}$, allora esiste un unico vettore $a \in \mathbb{R}^n$ tale che è valida la seguente relazione

$$L(x) =< x, a > \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } a = \begin{pmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ L(e_n) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione:
Sia $a \in \mathbb{R}^n$ il vettore $a = (a_1, ..., a_n)$. Definiamo $L(e_j) = a_j$, ora, per ogni $x = \sum x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, allora $< x, a >= \sum x_i a_i = \sum x_i L(e_i) = L(\sum x_i e_i) = L(x)$.

Lemma 3.2 Sia $L \in \mathbb{R}^{n^*}$. Allora, definito $||L|| = \sqrt{\sum_i L(e_i)^2}$, si ha che $|L(x)| \leq ||L|| \cdot ||x||$.

Dimostrazione:
Utilizziamo il Lemma 3.1, in questo caso $||a||_2 = ||L||$. Possiamo scrivere che

$$|L(x)| = |< x, a >| \leq ||a||_2 \cdot ||x||_2 = ||L|| \cdot ||x||_2$$

dove nel secondo passaggio si ha utilizzato la disuguaglianza di $Cauchy - Schwarz$. Dall'enunciato del teorema si deduce facilmente che $||L||$ può essere scritto come

$$||L|| = sup\{|L(x)| : ||x||_2 \leq 1\}$$

Deifnizione 3.4 Sia $f : A = int(A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $x \in A$. Diremo che f è differenziabile in x se esiste una funzione lineare $L \in \mathbb{R}^{n^*}$ tale che

$$f(y) - f(x) - L(y - x) = o(||y - x||_{\mathbb{R}^n})$$

in altre parole, f è differenziabile in x se

$$\lim_{y \to x} \frac{(y) - f(x) - L(y - x)}{||y - x||} = 0$$

Se la condizione è rispettata, chiamiamo la funzione L differenziale di f nel punto x e lo indichiamo in questo modo: $D_f(x)$ o $df(x)$.

Teorema 3.1(Differenziale totale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x \in A$, se f è differenziabile in x allora:

1. f è continua in x
2. tutte le derivate parziali di f esistono in x
3. Definito il vettore $\nabla f(x) = \sum \partial f_i e_i$ allora
$$\forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n D_f(x)(\mathbf{y}) =< \nabla f(x), \mathbf{y} >$$
4. Il funzionale lineare L è univocamente determinato

Dimostrazione:

4 Successioni e serie di funzioni

Definizione 4.1 Sia (X, d) spazio metrico e sia $C = \{f : A \subset X \to \mathbb{R}\}$, una successione di funzioni è un'applicazione

$$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow C$$
$$n \longmapsto f_n$$

Se esiste una costante $M > 0$ tale che $|f_n(x)| < M \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, x \in X$ diremo che la successione f_n è equilimitata.

Definizione 4.2 Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni tale che $f_n \in C = \{f : A \subset X \to \mathbb{R}\}$. Sia $x \in X$ fissato, consideriamo la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Se tale successione converge, diremo che (f_n) valutata in x è convergente. Consideriamo ora l'insieme

$$Y \subseteq X = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l \in \mathbb{R}\}$$

tale insieme viene chiamato *insieme di convergenza di* f_n. Sia ora $f : Y \longmapsto \mathbb{R}$ un'applicazione tale che $f(y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(y)$, chiameremo f funzione limite e diremo che (f_n) converge puntualmente a f in Y.
In altre parole, data $(f_n) \subset C$ successione di funzioni e $f \in C$, diremo che (f_n) converge puntualmente a f in Y se

$$\forall\, \epsilon > 0 \text{ e } \forall\, x \in Y \ \exists\, N(\epsilon, x) > 0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ se } n > N$$

Definizione 4.3 Sia $(f_n) \subset C$ successione di funzioni, diremo che (f_n) converge uniformemente a $f \in C$ in Y se

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, N(\epsilon) > 0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ se } n > N \ \forall\, x \in Y$$

In questo caso scriveremo che $f_n \rightrightarrows f$ in Y. Risulta facile vedere che se $f_n \rightrightarrows f$ allora (f_n) converge puntualmente a f.

Proposizione 4.1 Siano $(f_n), (g_n), (h_n) \subset C$ successioni di funzioni tali che

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_(x) \ \ \forall\, x \in A \text{ e } \forall\, n \in \mathbb{N}$$

se esiste una funzione $f \in C$ tale che $g_n \rightrightarrows f$ e $h_n \rightrightarrows f$ in Y allora si ha che $f_n \rightrightarrows f$.

Dimostrazione:
Sia $\epsilon > 0$, per ipotesi esiste $N(\epsilon) > 0 : |g_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e $|h_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in Y$ e $n > N$. Si ottiene facilmente che

$$f(x) - \epsilon \leq g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x) \leq f(x) + \epsilon \ \text{ per ogni } x \in Y \text{ e } n > N$$

Proposizione 4.2 Sia (f_n) successione di funzioni da $X \to \mathbb{R}$ limitate che converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ in $Y \subseteq X$, allora f è limitata e (f_n) è equilimitata.

Dimostrazione:
Siccome $f_n \rightrightarrows f$, fissato $\epsilon = 1$, esiste $N > 0 : |f_n(x) - f(x)| < 1$ per ogni $x \in Y$ e per ogni $n > N$. Supponiamo ora che esista un L_N tale che $|f_n(x)| \leq L_N$ per ogni $x \in Y$ e per ogni $n > N$. In tale caso si ha che

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + L_N \text{ se } n > N$$

si ottiene che f è una funzione limitata e, dette L_i le costanti tali che $|f_i(x)| \leq L_i$ per ogni $x \in Y$, chiamiamo $L = max\{L_i\}$ si ottiene che $|f_n(x)| \leq L_N + L$ per ogni $x \in Y$.

Proposizione 4.3 Sia (f_n) successione di funzioni da $X \to \mathbb{R}$ tale che $\forall\, n \in \mathbb{N} f_n \in C^0(X, \mathbb{R})$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightrightarrows f$ in $Y \subseteq X$, allora $f \in C^0(X, \mathbb{R})$

Dimostrazione:
Sia $\bar{x} \in Y$, fissiamo $\epsilon > 0$, esiste allora $N(\epsilon) > 0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ per ogni $x \in Y$ e per ogni $n > N$. Sfruttiamo ora il fatto che ciascuna f_n è continua in $\bar{x} \in Y$, esiste quindi un $\delta(n) > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(\bar{x})| < \epsilon/3$ se $d(x, \bar{x}) < \delta$ per ciascun $n \in \mathbb{N}$. Possiamo ora scrivere che

$$|f(x)-f(\bar{x})| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(\bar{x})+f_n(\bar{x})-f(\bar{x})| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(\bar{x})|+|f_n(\bar{x})-f(\bar{x})| < \epsilon$$

se $d(x, \bar{x}) < \delta(n)$ e $n > N$.

Proposizione 4.4 Sia (f_n) una successione di funzioni da $X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $I \subset \mathbb{R}$ un compatto. Sia, per ciascun $n \in \mathbb{N}$, f_n integrabile sul dominio I e sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightrightarrows f$, allora vale che f è Riemann integrabile in I, inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

Dimostrazione: Si ha per ipotesi che f_n è integrabile secondo Riemann in $I = [a, b]$. Fissiamo $\epsilon > 0$, esiste quindi una suddivisione $D(\epsilon)$ di I tale che $S(f_n, D) - s(f_n, D) < \epsilon$. Inoltre, dato che $f_n \rightrightarrows f$ esiste un $N > 0 : n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon(b - a)$ per ogni $x \in X$. Sia ora, per esempio, $D = \{a < x_1 < x_2 < ... < b\}$. Costruiamo ora $s_n(x)$ e $t_n(x)$ due funzioni a gradini in questa maniera

$$s_n(x) = \begin{cases} inf_{x\in[a,x_1)}\{f_n(x)\} - \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [a, x_1) \\ inf_{x\in[x_1,x_2)}\{f_n(x)\} - \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [x_1, x_2) \\ inf_{x\in[x_2,x_3)}\{f_n(x)\} - \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [x_2, x_3) \\ : & \\ : & \\ : & \\ inf_{x\in[x_k,b)}\{f_n(x)\} - \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [x_k, b) \end{cases}$$

$$t_n(x) = \begin{cases} sup_{x\in[a,x_1)}\{f_n(x)\} + \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [a, x_1) \\ sup_{x\in[x_1,x_2)}\{f_n(x)\} + \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [x_1, x_2) \\ sup_{x\in[x_2,x_3)}\{f_n(x)\} + \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [x_2, x_3) \\ : & \\ : & \\ : & \\ sup_{x\in[x_k,b)}\{f_n(x)\} - \epsilon/(b-a) & \text{se } x \in [x_k, b) \end{cases}$$

Risulta ora immediato verificare che, per ogni $n > N$

$$s_n(x) \leq f_n(x) - \epsilon/(b-a) \leq f(x) \leq f_n(x) + \epsilon(b-a) \leq t_n(x)$$

che equivale a dire che, considerata la suddivisione $D(\epsilon)$, è verificata la relazione

$$S(f, D) \leq S(t(x), D) \wedge s(f, D) \geq s(s(x), D) \Leftrightarrow S(f, D) - s(f, D) \leq S(t(x), D) - s(s(x), D)$$

Si può notare facilmente che $S(t(x), D) = S(f_n, D) + \epsilon$ e $s(s(x), D) = s(f_n, D) - \epsilon$ e quindi

$$S(f, D) - s(f, D) \leq S(f_n, D) - s(f_n, D) + 2\epsilon \leq 3\epsilon$$

Abbiamo dimostrato che f è Riemann integrabile su I, consideriamo ora la relazione

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

essa è verificata se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $N > n$ tale che $n > N \Longrightarrow$

$$\left| \int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx \right| < \epsilon$$

ma

$$\left| \int_I [f_n(x) - f(x)]dx \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$$

Proposizione 4.5 Sia $(f_n) \subset (C_b(X), d_\infty)$ successione di funzioni, essa converge uniformemente a $f \in C_b(X) \Longleftrightarrow d_\infty(f_n, f) \to 0$ se $n \to +\infty$.

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$
Sia $f_n \rightrightarrows f$, si ha che (fissato $\epsilon > 0$) esiste un $N > 0 : n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall \ x \in X$. Allora, siccome la relazione vale per ogni x, si ha che $sup_{x \in X}|f_n(x) - f(x)| = d_\infty(f_n, f) < \epsilon$.
$(\Leftarrow)$
Fissiamo $\epsilon > 0$ e sia $d_\infty(f_n, f) = sup_{x \in X}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ quando $n > N(\epsilon)$, a maggior ragione tale relazione vale per ogni $x \in X$.

Proposizione 4.6 Sia (X, d) spazio metrico e sia (f_n) una successione di funzioni da $X \to \mathbb{R}^n$, essa converge uniformemente a f in $Y \subseteq X$ se e solo se è soddisfatta la condizione di Cauchy

$$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ N(\epsilon) > 0 : sup||f_n(x) - f_m(x)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \text{ se } m, n > N$$

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$
Sia $f_n \rightrightarrows f$, si ha che

$$sup_{x \in Y}||f_n(x) - f_m(x)|| \leq sup||f_n(x) - f(x)|| + sup||f_m(x) - f(x)|| < 2\epsilon$$

se $m, n > N(\epsilon)$.
$(\Leftarrow)$
Sia soddisfatta la condizione di Cauchy per (f_n). Fissiamo a piacere $x \in Y$, la successione di funzioni valutata in x diventa successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ che è uno spazio metrico completo e dunque tale successione deve convergere. Al variare di $x \in Y$ posso dunque costruire una funzione $f : Y \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Questa non è altro che la funzione limite per la successione (f_n). Scegliamo ora $\epsilon > 0$ e troviamo un numero $N > 0$ tale che risulta soddisfatta la condizione di Cauchy. Fissiamo $n > N$ e facciamo tendere m a $+\infty$.

$$sup||f_n(x) - f_m(x)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \text{ se } n, m > N \longrightarrow sup||f_n(x) - f(x)|| < \epsilon \text{ se } n > N \ \forall \ x \in Y$$

Teorema 4.1 (Criterio di Dini) Sia $(f_n) \subset C(X, \mathbb{R})$ una successione di funzioni continue da X spazio metrico compatto a valori in $\mathbb{R}$. Sia $f \in C(X, \mathbb{R})$ tale che (f_n) converge puntualmente a f su tutto X. Sia inoltre (f_n) monotona crescente (decrescente) ovvero tale che $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \ \forall \ x \in X$ $(f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \ \forall \ x \in X)$ allora $f_n \rightrightarrows f$.

Dimostrazione:
Sia $\epsilon > 0$ e definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $F_n = \{x \in X : f(x) < f_n(x) + \epsilon\}$ e supponiamo (f_n) monotona crescente. Siccome f, f_n sono funzioni continue, l'insieme F_n è controimmagine dell'aperto $(-\infty, \epsilon)$ sotto la funzione continua $f - f_n$. Si deduce che, per la monotonia di (f_n), la successione (F_n) è monotona crescente nel senso che $F_n \subseteq F_{n+1}$. Si noti ora come $\bigcup F_n = X$, infatti se l'affermazione non fosse vera, esisterebbe un $x \in X$ tale che $\forall \ n \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) - f_n(x) > \epsilon$ il che contraddirebbe l'ipotesi di convergenza puntuale di f_n. L'insieme degli elementi della successione (F_n) costituisce un ricoprimento aperto di X, siccome X è compatto, è possibile estrarre dagli elementi della successione un sottoricoprimento finito. Esisteranno quindi N insiemi $\{F_i\}$ tali che la loro unione è uguale a X. L'insieme con indice maggiore, che chiamiamo N', sarà tale che $F_{N'} = X$ dato che la successione di insiemi è crescente. Dalla precedente relazione si deduce che esiste un $N' > 0 : f(x) - f_n(x) < \epsilon$ se $n > N'$ e per ogni $x \in X$ dato che ogni $x \in X$ appartiene anche a $F_{N'} \subseteq F_n(n > N')$.

Teorema 4.2 Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, (f_n) una successione di funzioni tale che $f_n \in C^1(A, \mathbb{R})\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ ed esista una funzione f tale che f_n converge puntualmente a f. Sia (∇f_n) la successione dei gradienti delle funzioni f_n, la funzione f risulta differenziabile in A se la successione (∇f_n) converge uniformemente a ∇f.

Dimostrazione:
Sia $g : A \to \mathbb{R}^n$ il $\lim_{n\to+\infty} \nabla f_n$. Fissiamo $a \in A$ ad arbitrio, poichè A è aperto esiste un $R > 0 : B(a, R) \subset A$. Sia ora (r_n) la successione

$$r_n = \frac{f_n(x) - f_n(a)}{||x - a||} \text{ con } x \in B(a, R)\backslash a$$

dimostriamo che (r_n) converge uniformemente in $B(a, R)\backslash a$ ovvero che è Cauchy uniforme. Per ipotesi la successione (∇f_n) converge uniformemente ed è quindi anche Cauchy uniforme, fissato $\epsilon > 0$ esiste dunque un $N > 0$ tale che $m, n > N \Rightarrow sup||\nabla f_n(x) - \nabla f_m(x)|| < \epsilon$. Ma allora possiamo considerare l'applicazione $x \longmapsto f_n(x) - f_m(x)$ e applicare il teorema della media

$$||f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))||_{\mathbb{R}} \leq ||\nabla f_n(\xi) - \nabla f_m(\xi)|| \cdot ||x - a|| \text{ con } \xi \text{ appartenente al segmento } xa$$

tale relazione diventa

$$|r_n(x) - r_m(x)| \leq ||\nabla f_n(\xi) - \nabla f_m(\xi)|| \leq sup||\nabla f_n(x) - \nabla f_m(x)|| < \epsilon \text{ se } m, n > N$$

La relazione sopra vale per ogni $x \in B(a, R)\backslash\{a\}$ e quindi (r_n) converge uniformemente in tale insieme. Sia ora $r(x) = lim_{n\to+\infty} r_n(x) = (f(x) - f(a)/||x - a||)$ date che f_n converge puntualmente a f, mostriamo ora che f è differenziabile in a e che $\nabla f(a) = g(a)$. Fissiamo a piacere $\epsilon > 0$, f risulta differenziabile in a se e solo

$$\text{se esiste un } \delta > 0 : d(x, a) \Rightarrow < \delta |f(x) - f(a) - < \nabla f(a), x - a > | < \epsilon$$

Scriviamo quindi $|f(x) - f(a) - < \nabla f(a), x - a > |$ così

$$|f(x) - f(a) + f_n(a) - f_n(a) + < \nabla f_n(a), x - a > - < \nabla f_n(a), x - a > - < g(a), x - a > | \leq$$

$$\leq |f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))| + |f_n(x) - f_n(a) - < \nabla f_n(a), x - a > | + | < g(a) - \nabla f_n(a), x - a > |$$

Usando la disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz* per l'ultimo membro e le osservazioni precedenti si ha che

$$|f(x) - f(a) - < g(a), x - a > | < 3\epsilon||x - a|| \Longleftrightarrow \frac{|f(x) - f(a) - < g(a), x - a > |}{||x - a||} < 3\epsilon$$

scelto $n > N$ e $x \in B(a, R)\backslash\{a\}$.

Teorema 4.3 (Criterio di Weierstraß) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto, $(f_n)_n$ successione di funzioni tali che per ogni $n \in \mathbb{N} f_n : A \to \mathbb{R}$ e $\{M_n\}_n \subset \mathbb{R}$ tali che:

1. $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in A$
2. $\sum M_n < +\infty$

ovvero la serie $\sum f_n$ converge totalmente in A, allora la serie $\sum f_n$ converge uniformemente in A.

Dimostrazione:
Sia $x \in A$ fissato ad arbitrio, si ha che $\sum f_n(x) \leq \sum M_n < +\infty$ e quindi la serie dei valori assoluti di $f_n(x)$ è convergente, allora (per il criterio dei valori assoluti) anche $\sum f_n(x)$ converge. Sia quindi, per ogni $x \in A$, $f(x) = \sum f_n(x)$. Fissiamo a piacere $\epsilon > 0$, dato che $\sum M_n$ converge allora esiste un $N > 0$ tale che $\sum_{n\geq N} M_n < \epsilon$. Detta quindi $s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ si ha

$$|f(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{j\geq n+1}^{\infty} f_j(x)\right| \leq \sum_{j\geq n+1}^{\infty} |f_j(x)| \leq \sum_{j\geq n+1}^{\infty} M_n < \epsilon$$

ovvero la serie di funzioni $\sum f_n$ converge uniformemente a $f(x)$.

Lemma 4.1 Dato $C([0,1])$ spazio delle funzioni continue definite dal compatto $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}$ esiste una successione di polinomi $(p_n) \subset C([0,1])$ che converge uniformemente a $p = \sqrt{x}$.

Dimostrazione:
Consideriamo la successione di polinomi $(p_n) \subset C([0,1])$ così costruita:

$$p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ p_{n-1}(x) + \dfrac{1}{2}(x - p_{n-1}^2(x)) & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Si verifica che $p_n(x) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$. Procediamo a mostrare questa asserzione per induzione.
Per $n = 0$ l'affermazione risulta ovvia, supponiamo ora $p_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$, mostriamo che, data questa ipotesi, $p_{n+1}(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

$$p_{n+1} \geq 0 \Longleftrightarrow p_n + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x)) \geq 0 \Longleftrightarrow p_n(x) \in \left[\frac{1-\sqrt{1+x}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right] = I$$

Siccome $p_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$ (ipotesi induttiva) se riuscissimo a dimostrare che $p_n(x) \leq 1$ avremo provato che, per ogni $x \in [0,1]$, $p_n(x)$ appartiene a I.
Procediamo nuovamente per induzione su n. Si verifica che $p_0(x) = 0 \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$, supponiamo ora $p_n(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Si ha che

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x)) \leq p_n(x) + \frac{1}{2} - \frac{p_n^2(x)}{2} \leq 1$$

Se $p_n(x) \leq 1$ (ipotesi induttiva), si ha quindi che $p_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$.
Procediamo ora con una nuova induzione su n, verifichiamo che $p_n(x) \leq \sqrt{x}$.
Si ha che $p_0(x) = 0 \leq \sqrt{x}$ per ogni $x \in [0,1]$. Supponiamo ora $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ per x nell'intervallo compatto $[0,1]$. Ora, poiché

$$p_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1 \quad \text{se } (x \in [0,1]) \Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq 1$$

e quindi risulta

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - p_n(x))(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq p_n(x) + (\sqrt{x} - p_n(x)) = \sqrt{x}$$

Da questa asserzione si desume inoltre che per ogni $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$ $x - p_n^2(x) \geq 0$ da cui segue che (p_n) è successione monotona crescente ($p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$). Sia ora $x \in [0,1]$ fissato, consideriamo la successione di numeri reali $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monotona crescente e limitata dall'alto da $\sqrt{x}$, essa ammette quindi limite, lo chiamiamo $p(x)$. Per l'arbitrarietà di $x \in [0,1]$ segue che (p_n) converge puntualmente a p in $[0,1]$. Possiamo sfruttare il Teorema 4.1 e affermare che $p_n \rightrightarrows p$ su $[0,1]$. Ma allora

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n+1}(x) = p(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x) + \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty}(x - p_n^2 x) = p(x) + \frac{1}{2}(x - p^2(x))$$

Da cui si ha che $p(x) = \sqrt{x}$.

Definizione 4.4 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, sia inoltre $*$ un operazione binaria di moltiplicazione tale che

$$* : V \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \longmapsto v * w$$

che rispetta le seguenti proprietà:

- $v * (w * u) = (v * w) * u \ \forall \ v, w, u \in V$.
- $v * (w + u) = v * w + v * u \ \forall \ v, w, u \in V$.

Sotto queste condizioni, la coppia $(V, *) = A$ è detta algebra dello spazio vettoriale V.
Se esiste inoltre un elemento 1 detta identità moltiplicativa o unità dell'algebra tale che $1v = v1 = v$ per ogni $v \in V$ allora l'algebra A è detta *algebra con unità*.
Un'algebra è detta chiusa se risulta un chiuso nella topologia associata allo spazio topologico dello spazio vettoriale. Sia ora $(A, *)$ un algebra su uno spazio vettoriale V, una struttura di algebra $\mathscr{A}$ su un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ è detta sotto algebra di A e vale che $\forall\ v, w \in \mathscr{A}, v * w \in \mathscr{A}$.

Lemma 4.2 Sia $A \subseteq C_b(X)$ una sotto algebra chiusa dello spazio delle funzioni continue e limitate da (X, d_x) a valori in $\mathbb{R}$, siano inoltre $f, g \in A$, allora risulta che le applicazioni

$$f \vee g : x \longmapsto max(f(x), g(x)) \qquad \text{e} \qquad f \wedge g : x \longmapsto min(f(x), g(x))$$

appartengono ad A.

Dimostrazione:
Risulta possibile ricavare l'espressione analitica delle funzioni $max(f(x), g(x))$ e $min(f(x), g(x))$ in funzione di f e g nel modo seguente:

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

Notiamo quindi che se riuscissimo a provare che, data $f \in A$, allora $|f| \in A$ si avrebbe la tesi. Scegliamo a piacere $f \in A$ diversa dalla funzione identicamente nulla (per la quale il lemma è ovviamente valido). Sia $a = ||f||_\infty$, notiamo che $f^2 \in A$ e anche $a^{-2}f^2 \in A$ ed inoltre $Im(a^{-2}f^2) \subseteq [0, 1]$. Possiamo sfruttare il lemma precedente che afferma che esiste una successione di polinomi (p_n) tale che $(p_n) \rightrightarrows \sqrt{x}$ se $x \in [0, 1]$. Sia ora, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p_n(a^{-2}f^2(x)) = c + a_1(a^{-2}f^2(x)) + a_2(a^{-2}f^2(x))^2 + ...$
Si osservi ora che $p_n(a^{-2}f^2) \in A$ dato che è combinazione lineare di elementi della sotto algebra A. Ma noi sappiamo che $p_n(a^{-2}f^2) \rightrightarrows \sqrt{a^{-2}f^2} = a^{-1}|f|$. Siccome A è chiusa e (p_n) è una successione convergente allora $a^{-1}|f| \in A$.

Definizione 4.5 Sia $\mathscr{F} \subseteq C(X)$ una collezione di funzioni, diremo che $\mathscr{F}$ separa i punti di X se, per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esiste $g \in \mathscr{F} : g(x) \neq g(y)$

Teorema 4.4 (Weierstraß-Stone) Sia X uno spazio metrico compatto e a una sotto algebra chiusa di $C(X) \equiv C_b(X)$ con unità e che separa i punti allora $a \equiv C_b(X)$.

Dimostrazione
Sia $f \in C(X)$, per ogni $x, y \in X$ esiste $h_{xy} \in a$ tale che $h_{xy}(x) = f(x)$ e $h_{xy}(y) = f(y)$, inoltre, poichè, per ipotesi, a separa i punti allora esiste $g \in a : g(x) \neq g(y)$. Sia quindi

$$h_{xy}(\cdot) = f(x) + (f(y) - f(x))\frac{g(\cdot) - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

Fissiamo $x \in X$ a piacere e $\epsilon > 0$, per ogni $y \in X$ poniamo

$$G(y) = \{z \in X : h_{xy}(z) < f(z) + \epsilon\}$$

Si ha che $G(y)$ è un aperto (controimmagine di una aperto sotto funzione continua). Al variare di $y \in X$ si ha che l'insieme $\{G(y)\}$ costituisce un ricoprimento aperto di X. Siccome X è un insieme compatto allora esistono N elementi di X che chiamiamo $\{y_j\}_{j\in\{1,...,N\}}$ tali che $X = \bigcup_j G(y_j)$.
Definiamo ora la funzione $h_x = h_{xy_1} \wedge h_{xy_2} \wedge ... \wedge h_{xy_N}$ appartenente alla sotto algebra a. Si deduce facilmente che $h_x(x) = f(x)$. Consideriamo ora un elemento $z \in X$ ad arbitrio, siccome $\bigcup_j G(y_j)$ costituisce un ricoprimento aperto di X, esisterà un $i \in \mathbb{N}$ tale per cui $z \in G(y_i)$. Ma allora

$$z \in G(y_i) \Longrightarrow h_{xy_i}(z) < f(z) + \epsilon \Longleftrightarrow h_x(z) \leq h_{xy_i}(z) < f(z) + \epsilon$$

Definiamo ora l'insieme $H(x)$ tale che

$$H(x) = \{z \in X : h_x(z) > f(z) - \epsilon\}$$

Notiamo che qualunque $x \in X$ appartiene a $H(x)$. Al variare di $x \in X$ l'insieme $\{H(x)\}$ costituisce un ricoprimento aperto di X dal quale è possibile estrarre un sotto ricoprimento finito. Esisteranno quindi degli indici $i \in \{1, ..., N'\}$ tali per cui $\bigcup_i H(x_i) = X$. Poniamo ora $h = h_{x_1} \vee h_{x_2} \vee h_{x_3} \vee ... \vee h_{x_{N'}}$ funzione appartenente alla sotto algebra a. Consideriamo ora $z \in X$, si ha che esiste un indice k tale che

$$z \in H(x_k) \Longrightarrow h_{x_k}(z) > f(z) - \epsilon \Longleftrightarrow h(z) \geq h_{x_k}(z) > f(z) - \epsilon$$

Ricordando che $h_x < f(x) + \epsilon \; \forall \; x \in X$ si ha che

$$f(z) - \epsilon < h(z) < f(z) + \epsilon \text{ per ogni } z \in X, \text{ ovvero } d_\infty(f, h) < \epsilon$$

Dalla quale si ha che $f \in a$ in quanto essa è chiusa nella topologia di $C(X)$.

Teorema 4.5 (Ascoli-Arzelà) Sia (f_n) una successione di funzioni da $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, se essa è equilimitata (esiste una costante $M > 0$ tale che $f_n(x) < M \; \forall \; x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$) e equicontinua (per ogni $\epsilon > 0$ e $x_0 \in [a, b]$ esiste $\delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$) allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ convergente uniformemente.

Dimostrazione:
Sia $X = [a, b] \cap \mathbb{Q}$, dato che $X \subset Q$ esso ha un infinità numerabile di elementi. Siano quindi $x_j \in X$ con $j \in \mathbb{N}$ gli elementi di X. Consideriamo ora la successione $f_k(x_1) \subset \mathbb{R}$, essa è una successione limitata in $\mathbb{R}$, per il Teorema 1.2 esiste una sottosuccessione $f_k^{(1)}(x_1)$ convergente, sia y_1 il suo limite. Considero ora la successione $f_k^{(1)}(x_2)$ essa è limitata in $\mathbb{R}$, posso utilizzare ancora il Teorema 1.2 e estrarre una sottosuccessione $f_k^{(2)}(x_2)$ convergente a y_2. Ora, per il teorema di unicità del limite, $f_k^{(2)}(x_1) \to y_1$ se $k \to +\infty$ dato che è sottosuccessione di $f_k^{(1)}(x_1)$. Possiamo procedere per iterazione, quello che si ottiene è che, $\forall \; h \in \mathbb{N}$, $f_k^{(h)}(x_n) \to y_n$ se $k \to +\infty$. Sia ora (g_k) la successione di funzioni $(f_k^{(k)})$ si ha naturalmente che $g_k(x_j) \to y_j$ se $k \to +\infty$. Per ogni $\epsilon > 0$ sia $\delta(\epsilon) > 0$ per cui vale l'equicontinuità della successione (f_n). Dividiamo X in N intervalli I_i tali che la "lunghezza" di ciascun intervallo sia minore di δ. Siano quindi $x_{j_1}, ..., x_{j_{N-1}}$ gli estremi di tali intervalli, per ogni $x \in X$ si ha che esiste un r tale che $|x - x_{j_r}| < \delta$. Siccome per ogni $r \in \{1, ..., N-1\}$ la successione $(g_k(x_{j_r}))$ è convergente, essa è anche di Cauchy in $\mathbb{R}$. Esiste quindi un $\nu > 0 : |g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| < \epsilon$ se $h, k > \nu$. Ora, per ogni $x \in [a, b]$, considero x_{j_r} tale che $d(x, x_{j_r})$, si ha che

$$|g_k(x) - g_h(x)| = |g_k(x) - g_k(x_{j_r}) + g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r}) + g_h(x_{j_r}) - g_h(x)| \leq$$

$$|g_k(x) - g_k(x_{j_r})| + |g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| + |g_h(x_{j_r}) - g_h(x)| \leq 3\epsilon$$

Per ogni $h, k > \nu$. Si ha quindi che (g_k) rispetta la condizione di Cauchy, ovvero (g_k) converge uniformemente.

Definizione 4.6 Sia (p_n) successione di polinomi dai reali a valori in $\mathbb{R}$ tali che

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_0(x - x_0)^k$$

Tale successione di polinomi prende il nome di serie di potenza di centro x_0. Notiamo subito che $p_n(x_0) = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, quindi $p_n \rightrightarrows 0_{C(\mathbb{R})}$ in $I = \{0\}$.

Teorema 4.6 Sia (S_k) una serie di potenze di centro x_0, se esiste un punto $\xi \neq x_0$ tale che $(S_k(\xi))$ converge, allora la serie converge assolutamente in ogni punto dell'intervallo aperto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta = |x_0 - \xi|$.

Dimostrazione:
Sia $\in \mathbb{R}$ e $x \neq \xi$, si ha che $a_k(x - x_0)^k = a_k(x - x_0)^k(\xi - x_0)^k(\xi - x_0)^{-k}$. Adesso, siccome la serie $\sum a_k(\xi - x_0)$ converge, si ha che $a_k(\xi - x_0)^k \to 0$ se $k \to +\infty$. Fissato quindi $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che $k > N \Rightarrow |a_k(\xi - x_0)^k| < M$. Si ha quindi che

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k(\xi - x_0)|^k \left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right|^k \leq M \left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right|^k = M|q|^k$$

Se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ allora $|q| < 1$ e dunque la serie $(S_k(x))$ è una serie geometrica con base $|q| < 1$ e quindi la serie è convergente.

Definizione 4.7 Sia (S_n) una serie di potenze di centro x_0, al variare di $x \in \mathbb{R}$, se $S_n(x)$ converge, definiamo la semi lunghezza $r(x)$ come $r(x) = d(x, x_0)$. Definiamo *raggio di convergenza della serie* (s_n) il numero

$$R = sup_{x \in \mathbb{R}}\{r(x)\}$$

Notiamo che non essendoci limite superiore a $r(x)$, $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Osservazione 4.1 Per come R è stato definito, si ha che $0 < R < +\infty$, inoltre, per il Teorema 4.6, la serie (S_n) converge assolutamente in ogni intervallo aperto $I \subset (x_0 - R, x_0 + R)$. Sicuramente la serie è non convergente assolutamente in $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$.

Teorema 4.7 Sia (S_n) una serie di potenze di centro x_0 con raggio di convergenza $R \neq 0$, la serie (S_n) converge totalmente in ogni intervallo compatto del tipo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ con $\delta < R$. Se la successione $(S_n(x_0 \pm R))$ converge assolutamente, allora la serie (S_n) converge totalmente in $[x_0 - R, x_0 + R]$.

Dimostrazione:
Sia $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, esiste allora $0 < \delta < R$ tale per cui $[a, b] \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Per definizione di R, esiste un numero $0 < \delta < r < R$ tale che la serie (S_n) converge assolutamente in $(x_0 - r, x_0 + r)$ e in particolare $(S_n(\delta))$ converge assolutamente. Valutiamo ora il modulo di un generico elemento della successione. Sia $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$|a_k||x - x_0|^k \leq |a_k|\delta^k \quad \text{inoltre la serie} \sum |a_k|\delta^k \quad \text{converge per ipotesi}$$

Abbiamo quindi dimostrato che in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ vi è convergenza totale della serie. Tale ragionamento è valido ovviamente anche per $R = +\infty$. Se la serie converge assolutamente negli estremi allora, se $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ la serie può essere stimata così:

$$\sum |a_k||x - x_0|^k \leq \sum |a_k|R^k \quad \text{la quale converge per ipotesi}$$

Teorema 4.8 (Abel) Sia (S_n) una serie di potenze di centro x_0 e raggio di convergenza $R > 0$. Se tale serie, valutata in $x = x_0 + R$ ($x = x_0 - R$), converge, allora essa converge uniformemente in ogni intervallo compatto $K \subseteq [x_0 - a, x_0 + R]$ ($[x_0 - R, x_0 + a]$) con $a < R$.

Dimostrazione:
Dimostriamo il caso in cui la serie converga nell'estremo destro dell'intervallo di convergenza. Sia, per semplicità, $x_0 = 0$ e $R = 1$, ricondursi a questi casi è possibile effettuando una traslazione e una dilatazione di un fattore $1/R$. Per ipotesi si ha che $\sum a_n R = \sum a_n$ converge. Mostriamo ora che la serie converge uniformemente in $[-r, 1]$ con $0 < r < 1$. Introduciamo il parametro $A_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$, verifichiamo ora sia verificata la condizione di Cauchy uniforme per le serie di funzioni. Si ha che, se $q > p$ e $0 \leq x \leq 1$

$$|S_q(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{k=p}^{q} a_k x^k\right| = \left|\sum_{k=p}^{q}(B_k - B_{k+1})x^k\right| = \left|\sum_{k=p}^{q} B_k x^k - \sum_{k=p}^{q} B_{k+1}x^k\right| =$$

$$\left|B_p x^p + \sum_{k=p+1}^{q} B_k x^k - \left(B_{q+1}x^q + \sum_{k=p+1}^{q} B_k x^{k-1}\right)\right| = \left|B_p x^p + \sum_{k=p+1}^{q} B_k(x^k - x^{k-1}) - B_{q+1}x^q\right| \leq$$

$$|B_p|x^p + \sum_{k=p+1}^{q} |B_k||x^k - x^{k-1}| + |B_{q+1}x^q|$$

ma siccome B_k converge (per ipotesi), per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $N > 0$ tale che $p > N \Rightarrow |B_p| < \epsilon$. Allora

$$|S_q(x) - S_p(x)| \leq \epsilon x^p + \epsilon \sum_{k=p+1}^{q} |x^k - x^{k-1}| + \epsilon x^q = \epsilon x^p + \epsilon(x^p - x^q) + \epsilon x^q \leq 2\epsilon$$

Proposizione 4.7 (Hadamard) Data la serie di potenze $(S_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$, se esiste il seguente limite

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Longrightarrow R = \frac{1}{l}$$

Dimostrazione:
Supponiamo che esista il limite per $n \to +\infty$ di $\sqrt[n]{|a_n|}$. Sia ora S la serie dei valori assoluti, fissiamo $x \in \mathbb{R}$ a piacere e sfruttiamo il criterio della radice per serie numeriche

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x-x_0)^k| \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to+\infty} |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0| l$$

Il criterio della radice per serie numeriche ci assicura che se $|x-x_0|l < 1$ la serie converge e se $|x-x_0|l > 1$ la serie diverge. Ricaviamo quindi che se $|x-x_0| < 1/l$ la serie converge assolutamente, se $|x-x_0| > 1/l$ la serie non converge. Il limite l rappresenta quindi l'inverso di R per l'Osservazione 4.1. I casi in cui $l = 0$ e $l = +\infty$ si risolvono facilmente.

Proposizione 4.8 (D'Alambert) Sia $(S_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ una serie di potenze, se esiste il seguente limite

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Longrightarrow R = \frac{1}{l}$$

Dimostrazione:
Supponiamo che esista il limite dell'enunciato. Consideriamo S la serie dei valori assoluti, scegliamo $x \in \mathbb{R}$ ad arbitrio e sfruttiamo il criterio del rapporto per serie numeriche

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x-x_0)^k| \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| = l|x-x_0|$$

Si possono fare tutte le considerazioni analoghe a quelle della Proposizione 4.7 e dimostrare così l'asserto.

Proposizione 4.9 Sia $(S_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ una serie di potenze, sia inoltre $(S'_n) = \sum_{k=1}^{n} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ la sua serie derivata. Allora (S_n) e (S'_n) hanno lo stesso raggio di convergenza.

Dimostrazione:

Proposizione 4.10 Sia $(S_n) = \sum a_k(x-x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ e sia $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ la sua somma. Allora si ha che f è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} \text{ e } \int_0^x f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$$

Dimostrazione:

Corollario 4.1 Se la serie di potenze $\sum a_k(x-x_0)^k$ ha raggio di convergenza $R \neq 0$ e la funzione $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ è la sua somma, allora $f \in C^\infty((x_0 - R, x_0 + R), \mathbb{R})$.

Proposizione 4.11 Siano $S_1(x) = \sum a_k x^k$ e $S_2(x) = \sum b_k x^k$ due serie di potenze con raggi di convergenza R_1 e R_2 e siano f_1 e f_2 le somme di tali serie. Allora la serie di potenze $\sum (a_k + b_k)x^k$ ha raggio di convergenza $R \geq min\{R_1, R_2\}$, inoltre

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)x^k = f_1(x) + f_2(x) \ \forall \ x \in (-R, R)$$

La serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k$ ha raggio di convergenza $R \geq min\{R_1, R_2\}$, inoltre

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k = f_1(x) f_2(x) \ \forall \ x \in (-R, R)$$