Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

Esercizi di autovalutazione

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *In $\mathbb{R}^2$ (dotato della topologia euclidea standard) si considerino $X_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, nx \leq y \leq (n+1)x\}$ per $n \in \mathbb{N}$. Denotato con $\mathring{X}_n$ l'insieme dei punti interni di X_n definiamo*

$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{X}_n.$$

Stabilire se X è chiuso e determinare punti interni, chiusura, frontiera, componenti connesse di X.

Soluzione:

X è unione di aperti e quindi è aperto e pertanto non è chiuso (infatti è non vuoto e strettamente contenuto in $\mathbb{R}^2$). Essendo aperto coincide con $\mathring{X}$. La chiusura di X è $\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ in quanto le rette $y = nx$ per $n \in \mathbb{N}$ sono costituite da punti di accumulazione; per verificare che anche il semiasse verticale $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}$ è costituito da punti di accumulazione per X, possiamo considerare la successione di punti $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ definita da $p_n := \left(\frac{y_0(2n+1)}{2n^2+2n}, y_0\right)$ con $y_0 > 0$ arbitrariamente fissato e osservare che $\lim_{n\to\infty} p_n = (0, y_0)$.
La frontiera è $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = \{\text{semiassi positivi}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = nx, x > 0\}$.
$\mathring{X}_n$ è connesso per archi (in particolare mediante cammini rettilinei), dato che X è unione disgiunta degli $\mathring{X}_n$, questi sono le sue componenti connesse.

Esercizio 2. *Sia consideri $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia indotta dalla metrica:*

$$D(x,y) := \begin{cases} \| x - y \| & \textit{se } y = \alpha x \textit{ per un qualche } \alpha \in \mathbb{R} \\ \| x \| + \| y \| & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\| \ \|$ è la norma standard su $\mathbb{R}^2$. Si verifichi che $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| \leq 1\}$ è chiuso e limitato ma NON compatto nella topologia indotta da D.

Soluzione:

Sia $\| x \|_D = D(x,0)$ la norma associata alla distanza D, osserviamo immediatamente che $\| x \|_D = \| x \|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ di conseguenza X è la palla chiusa $\{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \|_D \leq 1\}$ e pertanto è chiuso e limitato.
Per il teorema di Bolzano-Weierstrass X è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto (ovvero da ogni successione in X è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in X). Vediamo di esibire una successione $\{x_n\} \subset X$ che non ammette alcuna sottosuccesione convergente in X.
Definiamo la successione $\{x_n\} \subset X$ come $x_n := \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ per $n \geq 1$. Si verifica immediatamente che $x_n \in X$ per ogni $n \geq 1$. Inoltre conviene verificare che gli elementi della successione non siano proporzionali, altrimenti la distanza fra i punti coincide con quella euclidea e X è compatto nella topologia euclidea. Osserviamo che $x_n = \alpha x_m$ se e solo se $m = n$ e quindi due elementi distinti di $\{x_n\}$ non sono mai prtoporzionali.
Supponiamo che esista una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a $y \in X$, qualunque sia il valore di y esso può essere proporzionale al massimo ad un solo elemento di $\{x_{n_k}\}$. Di conseguenza:

$$\lim_{k\to\infty} D(x_{n_k}, y) = \lim_{k\to\infty} (\| x_{n_k} \| + \| y \|) = 2 \neq 0,$$

che genera l'assurdo per cui $\{x_n\}$ non può ammettere sottosuccessioni convergenti. X non è compatto.

Esercizio 3. *Dati $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che*

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Soluzione:
Dimostriamo che $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, le altre proprietá si dimostrano in maniera analoga. Ricordiamo che $\overline{A}$ é il piú piccolo insieme chiuso che contiene A. Per definizione abbiamo $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Essendo $\overline{A}$ un insieme chiuso che contiene $\overline{A}$ dalla minimalitá di $\overline{\overline{A}}$ si ottiene che $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$.