Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

Esercizi di autovalutazione

Esercizio 1. *Si calcoli (se esiste) il limite :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

SOLUZIONE:
La restrizione della funzione all'asse orizzontale $y = 0$ produce la funzione costante $f(x, 0) = 0$ mentre la restrizione della funzione alla parabola $y = x^2$ produce la funzione costante $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$. Il limite considerato non esiste.

Esercizio 2. *Si calcoli (se esiste) il limite :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^3 + xy^2}$$

SOLUZIONE:
Poiché $\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^3+xy^2} \neq \lim_{x\to0} \lim_{y\to0} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^3+xy^2}$, il limite considerato non esiste.

Esercizio 3. *Si calcoli (se esiste) il limite :*

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\sqrt{xy-1} - \sqrt{y}}{x^2 + y^2}$$

SOLUZIONE:
Dimostrare che la funzione $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy-1}-\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ é positiva nel suo dominio. Pertanto

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{\sqrt{xy-1}}{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e la conclusione segue osservando che

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Esercizio 4. *Si calcoli (se esiste) il limite :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y}$$

SOLUZIONE:
Detta $f(x, y) := \frac{\sin(xy)}{y}$ allora $f(0, y) = 0 \ \forall y \neq 0$. Se $x \neq 0$ allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} x = 0.$$

In alternativa, si poteva provedere ricordando che $|\sin(xy)| \leq |xy|$.

Esercizio 5. *Si calcoli (se esiste) il limite :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + (x + y)^2}{2x + y - (x + y)^2}$$

SOLUZIONE:
Il limite non esiste. Infatti detta $f(x, y) := \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}$, si ha:

$$\lim_{x\to0} f(x, -x) = 1$$

e

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

Esercizio 6. *Verificare se la funzione f definita come segue è continua in* $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3y^3+y^6}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

La tesi segue osservando che

$$0 \leq \left| \frac{2x^3y^3 + y^6}{x^4 + y^4} \right| \leq |xy| \left| \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4} \right| + y^2 \leq |xy| + y^2$$