Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Esercizi di autovalutazione 3

Esercizio 1. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n}$$

SOLUZIONE:

Effettuando la sostituzione $y = x^2$ si studia la serie di potenze $\sum_n 3^n y^n$, il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{3}$. Dato che per $y = \frac{1}{3}$ si ottiene $\sum_n 1$ che diverge, possiamo concludere che $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n}$ converge puntualmente in $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e uniformemente in ogni intervallo $[-\frac{1}{\sqrt{3}} + \epsilon, \frac{1}{\sqrt{3}} - \epsilon]$, con $0 < \epsilon < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 2. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^n$$

SOLUZIONE:

Il raggio di convergenza è $R = +\infty$.

Esercizio 3. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} x^n$$

SOLUZIONE:

Il raggio di convergenza è $R = 3$.

Esercizio 4. *Verificare che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n^2 x) \sin(3nx)}{\sqrt{n^3 + 7x^2}}$$

converge puntualmente in $(0, +\infty)$ *e uniformemente in tutti gli intervalli* $[a, b]$ *con* $0 < a < b$.

SOLUZIONE:

Si può esibire la convergenza assoluta sfruttando la seguente maggiorazione:

$$|f_n(x)| \leq \frac{2\log(n) + |\log x|}{n^{3/2}},$$

La serie numerica $\sum_n \frac{\log(n)}{n^{3/2}}$ è convergente e la serie di funzioni $\sum_n \frac{|\log(x)|}{n^{3/2}}$ converge puntualmente, di conseguenza la serie di funzioni in esame converge assolutamente e quindi puntualmente.
Osservando che:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| \leq \frac{2\log(n) + |\log(a)| + |\log(b)|}{n^{3/2}},$$

si conclude immediatamente che la serie di funzioni converge totalmente, quindi uniformemente, in $[a, b]$.