Università degli Studi di Trento

**CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA**

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

# Esercizi di autovalutazione 4

**Esercizio 1.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione di periodo* $\frac{1}{2}$ *definita da* $f(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos(2\pi x)$ *per* $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$*. Si determinino la serie di Fourier di* $f$ *e la somma della serie numerica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$*.*

Soluzione:

I coefficienti di Fourier sono:

$$a_0 = 0 \qquad b_n = 0 \qquad a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)},$$

la funzione è continua e derivabile a tratti quindi:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)} \cos(4\pi n x).$$

Dato che $f(0) = \frac{2}{\pi} - 1$ si ricava:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

**Esercizio 2.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione di periodo* $2\pi$ *definita da* $f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ *per* $x \in [-\pi, \pi)$*. Si determinino la serie di Fourier di* $f$ *e la somma della serie numerica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$*.*

Soluzione:

I coefficienti di Fourier sono

$$b_n = 0, \qquad a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)} \cos(nx)$$

la soluzione si ricava calcolando $f(\pi)$.

**Esercizio 3.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione di periodo* $2\pi$ *definita da* $f(x) = e^x$ *per* $x \in [-\pi, \pi)$*. Si determini la serie di Fourier di* $f$*.*

Soluzione:

I coefficienti di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1} n \sinh(\pi)}{n^2+1} \qquad b_n = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi)}{n^2+1}$$