ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

2019 – ANALISI II

Integrazione curvilinea

Esercizi 1. *Calcolare le lunghezze delle seguenti curve parametriche (talora in forma di grafico di funzione):*

(1)
$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix} \ , \quad t \in [0,1] \ , \qquad (R = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)) \ .$$

(2)
$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \arccos t \\ \log t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \ , \qquad (R = -\log \frac{\pi}{12}) \ .$$

(3)
$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{8t} \\ \log t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [1,2] \ , \qquad (R = 1 + \log 2) \ .$$

(4)
$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\cos 2t \\ \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ , \qquad (R = \sqrt{10}) \ .$$

(5)
$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 4\cos t - \cos 4t \\ 4\sin t - \sin 4t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [0, 2\pi] \ , \qquad (R = 32) \ .$$

(6)
$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cosh t \cos t \\ \cosh t \sin t \\ t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [0,1] \ , \qquad (R = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}}) \ .$$

(7)
$$y = \log \cos x \ , \quad x \in [0, \frac{\pi}{3}] \ , \qquad (R = \log(2 + \sqrt{3})) \ .$$

(8)
$$y = \sqrt{\frac{x^3}{6 - x}} \ , \quad x \in [0, 5] \ , \qquad (R = 6 + 3\sqrt{3}\log(2 + \sqrt{3})) \ .$$

(9)
$$y = x^2 \ , \quad x \in [1, 2] \ , \qquad (R = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(\frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}}) \ .$$

(10)
$$y = x + \frac{2}{3}x^{3/2} \ , \quad x \in [0, 1] \ , \qquad (R = \frac{4}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2} - \log(\frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}) \ .$$

Esercizi 2. *Calcolare gli integrali curvilinei* $\int_\gamma f ds$ *seguenti:*

(1)
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos x + \sin y \quad \text{e} \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \pi t \\ 2\pi t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [0, 1] \ , \qquad (R = 2\sqrt{5}) \ .$$

(2)
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{1 - y^2} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \ , \quad t \in [0, \pi] \ , \qquad (R = 2) \ .$$

(3)
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{z} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t^2 \end{bmatrix} \ , \quad t \in [0, 1] \ , \qquad (R = \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1) \ .$$

(4)
$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y \ , \ \text{e } \gamma \text{ è la curva grafico della funzione} \quad [0,1] \ni x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x^2} \ ,$$
$$(R = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})) \ .$$

Esercizi 3. *Calcolare gli integrali curvilinei* $\int_\gamma \omega$ *seguenti:*

(1)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y^2 dx + e^x dy \ ,$$
con γ *il segmento congiungente i punti* $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $(R = \frac{4}{3} + 2e(e-1))$.

(2)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\log y\, dx - y\arctan x\, dy \ ,$$
con γ *il segmento congiungente i punti* $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$, $\quad (R = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{9}{2}\log 3 - 5\arctan 3)$.

(3)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{(1+x)^2}dx - \frac{1}{(1+y)^2}dy \ ,$$
con γ *la spezzata congiungente i punti, nell'ordine,* $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad (R = 0)$.

(4)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\sin\sqrt{y}\, dx + y\sin x\, dy \ ,$$
con γ *la curva* $\gamma(t) = \begin{bmatrix}t\\t^2\end{bmatrix} \ , \quad t \in [0,\pi] \ , \quad (R = 2\pi^3 - 11\pi)$.

(5)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = zdx + xdy + ydz \ ,$$
con γ *la spezzata congiungente i punti, nell'ordine,* $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad (R = 1)$.

Esercizi 4. *Verificare se le seguenti forme differenziali lineari sono esatte nel loro dominio di definizione ed eventualmente calcolarne una primitiva (potenziale):*

(1)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x}{x+y}\, dx + \frac{y}{x+y} y\, dy \ .$$

(2)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\log(1+xy)\, dx + y\log(1+xy)\, dy \ .$$

(3)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\, dx + \frac{2yx^2}{(1+x^2y^2)^2}\, dy \ .$$

(4)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (\sqrt{y} - 2xy)\, dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\right)\, dy \ .$$

(5)
$$\omega\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1+y}{1+x}\, dx + \log(1+x)\, dy \ .$$

(6)

$$\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{x/y}\, dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)\, dy\ .$$