Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Decima lezione - 03/05/2018

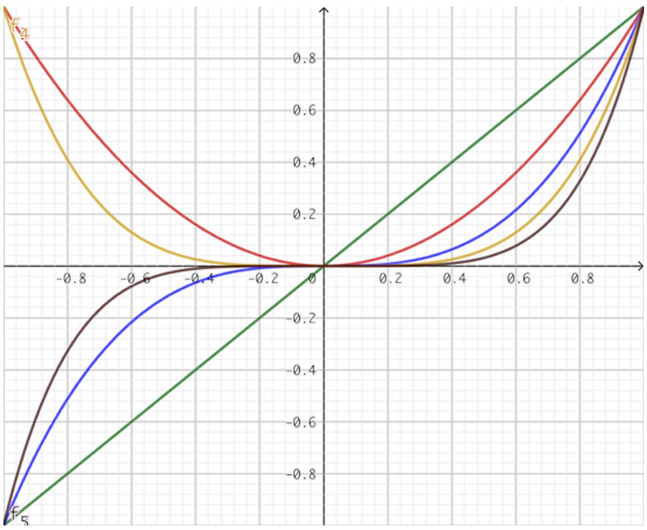
1. Esercizi

Esercizio 1. *Sia* $X = \{g : [-1;1] \to \mathbb{R}\}$ *(insieme di funzioni) e sia* $(f_n)_n \subset X$ *la successione di funzioni definita come:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to X \\ n \mapsto f(n) = f_n &: [-1,1] \to \mathbb{R} \\ & \qquad x \mapsto f(n)(x) = f_n(x) = x^n \end{aligned}$$

Stabilire per quali $x \in [-1,1]$ $(f_n)_n$ *converge puntualmente in* X *a* $f \in X$ *e scrivere l'espressione della funzione limite* f*.*

Soluzione:
Prima di andare a calcolare l'eventuale funzione limite f, osserviamo cosa accade a livello grafico:



qui abbiamo riportato i grafici di $f_n(x)$ per i valori $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
Osserviamo le seguenti cose:

- al crescere di $n \in \mathbb{N}$, la successione numerica $(f_n(x))_n$ si schiaccia sull'asse x nell'intervallo $(-1,1)$;
- agli estremi dell'intervallo di definizione $x = \pm 1$ ogni elemento della successione f_n assume i seguenti valori: $f_n(1) = 1$; $f_n(-1) = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Intuiamo quindi che, se esistesse una funzione limite $f \in X$, essa dovrebbe avere la seguente forma:

$$\begin{aligned} f :] -1, 1] &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione 1. *In* $x = -1$ *non abbiamo speranza di avere convergenza puntuale, in quanto la successione (numerica)* $(a_n)_n = ((-1)^n)_n$ *è indeterminata in* $\mathbb{R}$.

Per dimostrare l'effettiva convergenza puntuale di $(f_n)_n$ a f in $]-1,1]$, e concludere così l'esercizio, facciamo vedere che
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0 \ \ \forall\, x\in(-1,1)$$
(in $x=1$ è banale, essendo $(1)^n = 1 \to 1$ per $n\to+\infty$).
A tal fine, applicando la definizione di limite, fissiamo $\varepsilon>0$ e $\overline{x}\in(-1,1)$ (ricordiamo che questo tipo di convergenza è definita puntualmente) e andiamo a valutare la distanza in $\mathbb{R}$ (per comodità, ci restringeremo al caso $\overline{x}\in[0,1)$ risulterà analogo l'altro caso):
$$d_{\mathbb{R}}(f_n(\overline{x}), f(\overline{x})) = |f_n(\overline{x}) - f(\overline{x})| = |\overline{x}^n| = \overline{x}^n$$
Osserviamo che tale quantità è minore di ε se e solo se:
$$\overline{x}^n < \varepsilon \iff n > \log_{\overline{x}}\varepsilon = \frac{\log\varepsilon}{\log\overline{x}}$$
essendo $x<1$ e applicando il cambio di base logaritmico.
Scelto quindi $N = N(\varepsilon,\overline{x}) = \lceil\frac{\log\varepsilon}{\log\overline{x}}\rceil\in\mathbb{N}$, sappiamo con certezza che $d_{\mathbb{R}}(f_n(\overline{x}), f(\overline{x}))<\varepsilon\ \forall n>N$.
Abbiamo così verificato quanto richiesto.

Osservazione 2. *Nel precedente esercizio è mostrato un classico esempio di successione di funzioni che è continua $\forall n\in\mathbb{N}$, nel suo insieme di definizione, la cui funzione limite non è tuttavia continua nel dominio di convergenza. In particolare, ciò rappresenta un tipico controesempio di successione di funzioni che converge puntualmente ma non uniformemente in un certo dominio di definizione.*

Esercizio 2. *Data la stessa successione dell'esercizio precedente, definita questa volta in $X = C_b(]-1,1])$ (insieme delle funzioni continue e limitate-bounded definite da $]-1;1]$ a valori in $\mathbb{R}$)da $f_n(x) = x^n$ $\forall x\in]-1;1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, calcolare il più grande sottointervallo $I\subset]-1,1]$ nel quale c'è convergenza uniforme di $(f_n)_n$.*

Soluzione:

Ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinché $(f_n)_n$ converga uniformemente a
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in(-1,1) \\ 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$$
è che la corrispondente successione numerica
$$\begin{aligned} a &: \mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n) = a_n = \sup_{x\in]-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$
converga a $0\in\mathbb{R}$.
Osserviamo che $\forall n\in\mathbb{N}$
$$\begin{aligned} a_n = \sup_{x\in]-1,1]} |f_n(x)-f(x)| &= \sup_{x\in]-1,1]} \begin{cases} \sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x)-f(x)| & \text{se } x\in]-1,1[\\ |f_n(1)-f(1)| & \text{se } x=1 \end{cases} \\ &= \sup_{x\in]-1,1]} \begin{cases} \sup_{x\in]-1,1[} |x^n| & \text{se } x\in]-1,1[\\ |1-1| & \text{se } x=1 \end{cases} \\ &= \sup_{x\in]-1,1[} \begin{cases} 1 & \text{se } x\in]-1,1[\\ 0 & \text{se } x=1 \end{cases} = 1\to 1\neq 0 \text{ per } n\to+\infty \end{aligned}$$
Ne consegue che, in tutto l'intervallo $]-1,1]$ non c'è speranza di avere convergenza uniforme. Analogamente, non sarà possibile ottenere convergenza uniforme nel sottointervallo $]-1,1[\subset]-1,1]$ nel quale valgono le stesse precedenti considerazioni $a_n = 1\to 1\neq 0$ per $n\to+\infty$.
Supponendo che possa esserci convergenza uniforme in un qualche sottoinsieme proprio $I\subset]-1,1[$, la forma più grande che I possa avere è del tipo:
$$I = [-r,r] \text{ con } r\in[0,1[$$
Supponendo quindi l'esistenza di $r\in[0,1[$, abbiamo che
$$a_n = \sup_{x\in[-r,r]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[-r,r]} |x^n| = r^n$$
Ci chiediamo quindi se
$$a_n\to 0 \iff r^n\to 0$$

A tal fine, applicando la definizione di limite, fissiamo (solamente) $\varepsilon > 0$ e consideriamo:

$$d_{\mathbb{R}}(a_n, 0) = |r^n - 0| = |r^n| = r^n$$

Osserviamo che tale quantità è minore di ε se e solo se:

$$r^n < \varepsilon \iff n > \log_r \varepsilon = \frac{\log \varepsilon}{\log r}$$

Scelto quindi $N = N(\varepsilon) = \lceil \frac{\log \varepsilon}{\log r} \rceil \in \mathbb{N}$, sappiamo con certezza che $d_{\mathbb{R}}(a_n, 0) < \varepsilon \ \forall n > N$.