Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Dodicesima lezione - 10/05/2018

1. Esercizi

Esercizio 1. *Considerata la serie di funzioni* (*serie geometrica*)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

studiare convergenza puntuale ed uniforme della serie in $\mathbb{R}$.

Soluzione:

Ricordiamo, in questo primo esempio, che ogni serie di funzioni altri non è che una successione di somme, secondo la seguente relazione: fissato $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e considerata la serie numerica (una volta fissata la variabile x, è solo n a variare)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\overline{x})$$

possiamo definire successione di 'somme parziali' $(S_k(\overline{x}))_k$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} S_0(\overline{x}) := f_0(\overline{x}); \\ S_1(\overline{x}) := f_0(\overline{x}) + f_1(\overline{x}); \\ ... \\ S_k(\overline{x}) := f_0(\overline{x}) + f_1(\overline{x}) + ... + f_k(\overline{x}) = \sum_{n=0}^{k} f_n(\overline{x}) \end{cases}$$

Risulterà quindi che lo studio della convergenza (puntuale e uniforme) di ciascuna serie di funzioni, possa essere ricondotto a quello della convergenza (puntuale e uniforme) della corrispondente successione di somme parziali $(S_k)_k$. A livello pratico, raramente risulterà possibile lavorare con la successione di somme parziali, non essendo sempre possibile scrivere in forma 'pratica' il termine generale $S_k(x)$.
Nel nostro esercizio, è comunque possibile osservare che, fissato $\overline{x} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$S_k(\overline{x}) = f_0(\overline{x}) + f_1(\overline{x}) ... + f_k(\overline{x}) = \overline{x}^0 + \overline{x}^1 + ... + \overline{x}^k = 1 + \overline{x} + ... + \overline{x}^k = \frac{1 - \overline{x}^{k+1}}{1 - \overline{x}}$$

Osservazione 1. *Tale stima discende dal fatto che* $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{cases} S_{k+1}(x) = S_k(x) + x^{k+1}; \\ S_{k+1}(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{k+1} = 1 + x(1 + x + x^2 + ... + x^k) = 1 + xS_k(x); \end{cases}$$

$$\implies S_k(x) + x^{k+1} = 1 + xS_k(x) \implies S_k(x)(1 - x) = 1 - x^{k+1} \implies S_k(x) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

La somma della nostra serie $S(\overline{x})$, se esistesse in $\mathbb{R}$ (finita), discenderebbe dal calcolo del seguente limite:

$$S(\overline{x}) = \lim_{k \to +\infty} S_k(x) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1 - \overline{x}^{k+1}}{1 - \overline{x}}$$

Arrivati a questo punto, per calcolare il risultato limite, è necessario fare delle considerazioni su $\overline{x}$.

(i) se $|\overline{x}| > 1$, allora la somma $S(x)$ non può essere finita (in particolare, per $\overline{x} < -1$ non esiste in $\mathbb{R}$ il $\lim\limits_{k \to +\infty} S_k(x)$);

(ii) se $|\overline{x}| < 1$, $S(\overline{x}) = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1 - \overline{x}^{k+1}}{1 - \overline{x}} = \dfrac{1}{1 - \overline{x}}$;

(iii) se $\overline{x} = 1$, caso inizialmente escluso, per il quale non vale la precedente stima su $S_k(x)$, la serie di partenza diviene
$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$$
che non ha speranza di convergere (serie numerica divergente);

(iv) se $\overline{x} = -1$, la serie di partenza diviene
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$
(serie numerica a segni alterni) in questo caso la somma della serie è un valore finito, oscillante tra 0 e 1 e, anche in questo caso, non abbiamo convergenza puntuale della serie in $\mathbb{R}$.

Ne discende che l'intervallo di convergenza, cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui vi è convergenza puntuale, è $I = (-1, 1)$.

Osservazione 2. *Osserviamo che la somma della serie $S(x)$ ottenuta al punto (ii), è ottenibile anche mediante il seguente ragionamento algebrico, simile a quello visto in precedenza:*
$$\begin{aligned} S(x) &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + ... = x^0 + x^1 + x^2 + ... \\ &= 1 + x + x^2 + ... = 1 + x(1 + x + x^2 + ...) \\ &= 1 + xS(x) \implies S(x) - xS(x) = 1 \implies S(x) = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Passiamo ora allo studio della convergenza uniforme. Osserviamo per prima cosa che, dove non c'è convergenza puntuale, non c'è alcuna speranza di avere convergenza uniforme. Ricordiamo poi che lo studio della convergenza uniforme per una generica serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, coincide con lo studio della convergenza uniforme per la corrisponde successione di somme parziali $(S_k)_k$.
Per prima cosa, dopo aver verificato nella prima parte dell'esercizio che l'intervallo di convergenza (puntuale) è $I = (-1, 1)$, proviamo a vedere se la serie fosse convergente uniformemente in tutto I. Si nota fin da subito che ciò non è possibile, essendo
$$\sup_{x \in I = (-1,1)} |S_k(x) - S(x)| = \sup_{x \in I} \left| \frac{1 - x^{k+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x \in I} \frac{|-x^{k+1}|}{1-x} = +\infty$$
(sup assunto in $x = 1$).
Proviamo quindi a restringere l'intervallo I al più grande compatto in esso contenuto. A tal proposito, fissiamo $a \in [0, 1)$ e consideriamo l'intervallo $J = [-a, a]$ (chiaramente $J \subset\subset I$, cioè J è un 'compatto contenuto' in I). Analogamente a prima, abbiamo:
$$\sup_{x \in J = [-a,a]} |S_k(x) - S(x)| = \sup_{x \in J} \left| \frac{1 - x^{k+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x \in J} \frac{|-x^{k+1}|}{1-x} = \frac{+a^{k+1}}{1-a}.$$
Per concludere, osserviamo che il valore appena ottenuto tende effettivamente a zero, per $k \to +\infty$:
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a^{k+1}}{1-a} = 0$$
il che ci garantisce la convergenza uniforme della serie in tutto J.

Osservazione 3. *Ricordiamo per concludere, che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ altri non è che una serie di potenze. Tutti i risultati appena ottenuti sarebbero quindi potuti essere stati dimostrati, fin dal principio, applicando la teoria sulle serie di potenze, avendo però l'accortezza di verificare 'a mano' cosa accade agli estremi dell'intervallo di convergenza puntuale $I = (-1, 1)$.*