Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

Foglio di esercizi 1

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Stabilire se il sottospazio di* $\mathbb{R}^2$ *(dotato della topologia euclidea standard) definito come* $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y - xy^2 - x + y = 0\}$ *è connesso.*

SOLUZIONE:

Poiché $x^2y-xy^2-x+y = (xy-1)(x-y)$ possiamo scrivere $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ e $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. X_1 è un'iperbole e dunque risulta essere l'unione dei suoi due rami $R_1 = \{(x, y) \in X_1 : x > 0\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in X_1 : x < 0\}$ che sono connessi. X è così dato dall'unione dei tre connessi R_1, R_2, X_2 tali che $R_1 \cap X_2 = \{(1, 1)\} \neq \emptyset$ e $R_2 \cap X_2 = \{(-1, -1)\} \neq \emptyset$. Quindi X è connesso.

Esercizio 2. *Stabilire se* $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1\}$ *è aperto, chiuso, compatto, connesso nella topologia euclidea di* $\mathbb{R}^2$ *oppure no.*

SOLUZIONE:

Fissato il punto $(1, 0) \in X$, per ogni palla aperta centrata in $(1, 0)$ il punto $(1 + \epsilon, 0)$ vi è contenuto per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Osserviamo che $(1 + \epsilon, 0) \in X$ se e solo se $(1 + \epsilon)^2 \leq 1$ ovvero $\epsilon = 0$. Il punto $(1 + \epsilon, 0) \notin X$ per ogni $\epsilon > 0$ e quindi $(1, 0)$ non è punto interno. X non è aperto.
Definiamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come $f(x, y) := x^2 - y^2$ e osserviamo che $X = f^{-1}((-\infty, 1])$. X è chiuso in quanto controimmagine mediante funzione continua di $(-\infty, 1]$ che è chiuso di $\mathbb{R}$.
Dato che $(0, r) \in X$ per ogni $r \in \mathbb{R}$, X risulta essere non limitato e quindi non compatto.
Si dimostra facilmente che il punto $(0, 0) \in X$ può essere connesso al generico punto $(x, y) \in X$ mediante cammino rettilineo. Infatti se $t \in [0, 1]$ allora $t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(x^2 - y^2) \leq 1$ cioè $(tx, ty) \in X$, definiamo $\alpha : [0, 1] \to X$ come $\alpha(t) := (tx, ty)$, otteneniamo così un cammino che congiunge $\alpha(0) = (0, 0)$ al punto arbitrario $\alpha(1) = (x, y) \in X$. X è connesso per archi quindi connesso.

Esercizio 3. *Stabilire se i seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^2$ *(dotato della topologia euclidea standard) sono aperti, chiusi, compatti oppure no:*

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2xy + 1\} \qquad Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x + y|, |x - y|) \leq 1\}$$

SOLUZIONE:

Notiamo subito che $(x, y) \in X$ se e solo se $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \leq 1$, ovvero $x - y \in [-1, 1]$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione continua definita da $f(x, y) := x - y$, abbiamo così che $X = f^{-1}([-1, 1])$. X è chiuso in quanto controimmagine di un intrevallo chiuso attraverso una funzione continua. Dato che gli unici aperti-chiusi di $\mathbb{R}^2$ sono $\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ concludiamo che X non è aperto. Poiché $(x, x) \in X$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo che X non è limitato e quindi non compatto.
Y è controimmagine dell'intervallo chiuso $[0, 1]$ mediante la funzione continua $f(x, y) := \max(|x+y|, |x-y|)$ perciò è chiuso. $Y \neq \emptyset, \mathbb{R}^2$ quindi non è aperto. Infine se $(x, y) \in Y$ allora $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ dunque Y è limitato quindi compatto.

Esercizio 4. *In* $\mathbb{R}^2$ *(dotato della topologia euclidea standard) si consideri* $X = A \cup B$ *dove* $A := \{0\} \times [0, 1]$ *e* $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cos(1/x), x \in (0, 1]\}$. *Stabilire se* X *è connesso.*

SOLUZIONE:

A è prodotto di connessi e quindi è connesso. B è grafico di una funzione continua su dominio connesso quindi è connesso. Inoltre $A \cap B = \emptyset$, dunque X è sconnesso se e solo se A e B sono aperti, ovvero se esistono U_1 e U_2 aperti di $\mathbb{R}^2$ tali che $A = X \cap U_1$ e $B = X \cap U_2$.

Assumiamo l'esistenza di siffatti U_1 e U_2. Sia $p = (0, y_0)$ con $y_0 \in [0, 1]$ punto fissato in A, evidentemente U_1 è intorno di p, se si costruisce una successione di punti contenuti in B che converge a $p \in A$ si giunge a concludere che l'intersezione di B e U_1 è non vuota e questo porta a un assurdo che obbliga a negare l'esistenza di U_1 e U_2. Più precisamente: sia $\alpha := \arccos(y_0)$ e si consideri la successioe di punti $\{p_n = (x_n, y_0)\}$ definita da $x_n := \frac{1}{\alpha+2n\pi}$. La successione è contenuta in B infatti $x_n \in (0, 1]$ e $\cos(1/x_n) = \cos(\alpha + 2n\pi) = y_0$, inoltre $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Quindi p è punto di accumulazione per $\{p_n\}$ e dunque $U_1 \cap B \neq \emptyset$. Concludiamo che $A \cap B = (X \cap U_1) \cap B = X \cap (U_1 \cap B) \neq \emptyset$. Dato che $A \cap B = \emptyset$ per definizione di A e B, si ha una contraddizione e X risulta essere connesso.

Esercizio 5. *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati e $T : X \to Y$ una mappa lineare. Dimostrare che se*

$$M := \sup_{x\in X, \|x\|_X=1} \|T(x)\|_y < \infty$$

allora T é continua.

Soluzione:

Sia $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$. Per ogni $x \neq x_0$ vale che:

$$\|T(x) - T(x_0)\|_Y = \|T\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_X}\right)\|_Y \|x - x_0\|_X \leq M\|x - x_0\|_X$$

preso $\delta = \varepsilon/M$ otteniamo T é continua in x_0 e per l'arbitrarità di x_0 é continua in X.