Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 2

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Calcolare (se esiste) il seguente limite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2}$$

SOLUZIONE:
Consideriamo la funzione ristretta alla retta $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$ e calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx\log(1+x^2+3m^2x^2)}{x^2+5m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx(x^2+3m^2x^2)}{x^2(1+5m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx+3m^3x}{1+5m^2} = 0.$$

Se il limite esiste allora è nullo. Si deve verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\| (x,y) \| < \delta$ allora:

$$\left| \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} - 0 \right| < \epsilon.$$

Lo si può verificare considerando le semplici maggiorazioni:

$$\left| \frac{y\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \right| \leq \frac{|y|(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \leq |y|.$$

Come conseguenza del teorema del confronto il limite vale 0.

Esercizio 2. *Calcolare (se esiste) il seguente limite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

SOLUZIONE:
Consideriamo la funzione ristretta alla retta $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$ e calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(mx^2)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0.$$

Se il limite esiste allora è nullo. Riscrivendo il problema utilizzando le coordinate polari:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\vartheta\sin(\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)}{\rho^2}$$

e osservando che:

$$\left| \frac{\rho\cos\vartheta\sin(\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)}{\rho^2} \right| \leq \frac{|\sin(\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)|}{\rho} \leq \frac{\rho^2|\cos\vartheta\sin\vartheta|}{\rho} \leq \rho \longrightarrow 0,$$

si può concludere che $\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\vartheta) = 0$ uniformemente in $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e quindi il limite in questione esiste nullo.

Esercizio 3. *Calcolare (se esiste) il seguente limite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$$

Soluzione:

Considerando la restrizione alla retta $y = 0$ si ottiene la funzione che vale identicamente 0. Mentre considerando la restrizone a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x}\}$ si ottiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|A}(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \neq 0,$$

di conseguenza il limite considerato non esiste.

Esercizio 4. *Stabilire per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esiste il seguente limite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Soluzione:

In coordinate polari:

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-1} |\sin\vartheta|^\alpha \cos(\rho\cos\vartheta)$$

se $\alpha > 1$ il limite esiste e vale 0. Nel caso $\alpha \leq 1$ il limite non esiste in quanto $\lim_{\rho\to 0} f(\rho, \vartheta = 0) \neq \lim_{\rho\to 0} f(\rho, \vartheta = \pi/2)$.

Esercizio 5. *Si verifichi esplicitamente che:*

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + xy = +\infty$$

Soluzione:

Per dimostrarlo basta esibire una funzione $g = g(\rho)$ ben definita tale che $f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) \geq g(\rho) \to +\infty$ per $\rho \to +\infty$.

$$\begin{aligned} f(\rho,\vartheta) &= \rho^4\cos^4\vartheta + \rho^4\sin^4\vartheta - \rho^2\cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta + \rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta = \\ &= \rho^4(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta) - \rho^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$, $\cos\vartheta\sin\vartheta = \frac{\sin(2\vartheta)}{2}$ e quindi $\frac{1}{2} \leq 1 - \cos\vartheta\sin\vartheta \leq \frac{3}{2}$. Inoltre la funzione $h(\vartheta) := \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta$ è continua in $[0, 2\pi]$ e strettamente positiva quindi ammette valore minimo $m > 0$ su $[0, 2\pi]$ in virtù del teorema di Weiestrass. La funzione g può così essere definita come $g(\rho) = m\rho^4 - \frac{3}{2}\rho^2$.

Esercizio 6. *Si calcoli il limite :*

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} x^3 y e^{-xy} \quad \textit{con} \quad (x,y) \in X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \leq y \leq 2x\}$$

Soluzione:

$(x,y) \in X \implies x^2 \leq xy \leq 2x^2 \implies e^{-2x^2} \leq e^{-xy} \leq e^{-x^2}$ e $x^4 \leq x^3 y \leq 2x^4 \implies x^4 e^{-2x^2} \leq x^3 y e^{-xy} \leq 2x^4 e^{-x^2}$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x^4 e^{-x^2} = 0$, il limite è uguale a 0.

Esercizio 7. *Si calcoli (se esiste) il limite :*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2}$$

Soluzione:

Osserviamo che

$$0 \leq \left|\frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2}\right| \leq \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| |z-1| \leq \frac{|z-1|}{2} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,1)\}$$

da cui

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2} = 0.$$

Esercizio 8. *Dire se la seguente funzione:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

SOLUZIONE:

Basta verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Restringendo la funzione alla famiglia $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ otteniamo che essa ha limite per $x \to 0$ uguale a $\frac{1}{2}$. Questo implica che la funzione non é continua nel punto $(0,0)$.