Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 10

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Data* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$*. Determinare* $f(\mathbb{R}^2)$*.*

Soluzione:

E' facile verificare che i punti critici di f sono $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Il test della matrice Hessiana garantisce che $(0, 0)$ é di sella mentre gli altri due punti sono di minimo locale. Verifichiamo che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$. Infatti, posto $x = tu$ e $y = tv$ con $t \in \mathbb{R}$ e $u^2 + v^2 = 1$ abbiamo

$$f(tu, tv) = t^4(u^4 + v^4) - 4t^2uv.$$

La funzione $u^4 + v^4$ ha minimo assoluto strettamente positivo m sull'insieme $u^2 + v^2 = 1$, inoltre $-2uv \geq -u^2 - v^2 = -1$. Ne segue che

$$f(tu, tv) \geq mt^4 - 2t^2$$

e quindi $f(tu, tv) \to +\infty$ quando $t \to \infty$ uniformemente in (u, v). Ne segue che f minimimo assoluto in $\mathbb{R}^2$ e quindi i punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ sono di minimo assoluto per f. Essendo $\mathbb{R}^2$ connesso e $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$ concludiamo che $f(\mathbb{R}^2) = [-2, +\infty)$.

Esercizio 2. *Data* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $f(x, y) = x + y$*. Determinare se* f *ammette massimo e minimo nel triangolo pieno* T *di vertici* $(0, 0)$*,* $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$*.*

Soluzione:

Poinché il triangolo pieno é chiuso e limitato e la funzione f é continua essa ammette massimo e minimo in T. Analizziamo separatamente l'interno di T e il bordo. Nell'interno: f non ha punti stazionari in bR^2 e dunque nemmeno nell'interno del triangolo, ne segue che i punti di massimo e minimo si devono trovare sul bordo. Sul bordo: il bordo é dato dall'unione dei seguenti tre segmenti:

$$\gamma_1(t) = (0, t) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$\gamma_2(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$\gamma_3(t) = (t, 1 - t) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Analizziamo separatamente il comportamento di f su γ_i, $i = 1, 2, 3$.

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t)) = t, \; f(\gamma_3(t)) = 1.$$

Ne concludiamo che f ha massimo 1 raggiunto sui punti del tipo $(t, 1-t) \quad 0 \leq t \leq 1$ e minimo 0 raggiunto in $(0, 0)$.

Esercizio 3. *Determinare massimo e minimo assoluti di* $f(x, y) = x^2 + 3y$ *in* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$

Soluzione:

La funzione non presenta punti stazionari, quindi i punti si massimo e minimo assoluti (che esistono per Weierstrass) vanno cercati sul bordo di A che può essere parametrizzato da:

$$\alpha(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Lo studio di massimo e minimo della funzione di una variabile reale $h(t) = f\alpha(t)) = 4\cos^2 t + 9\sin t$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ consente di trovare i punti critici $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. I valori della funzione da valutare sono: $h(0) = h(2\pi) = 4, h(\frac{\pi}{2}) = 9$, $h(\frac{3}{2}\pi) = -9$. Quindi:

$$\max_A f = 9 \qquad \min_A f = -9.$$

Esercizio 4. *Stabilire se la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (t^3, t^2, t\sin(\pi/t)$ non é rettificabile*

Soluzione:

Dati i punti $P_j = 2/(2j+1)$ $j = 1, \ldots, n$. Allora

$$\gamma(P_j) = \left(\frac{8}{(2j+1)^3}, \frac{4}{(2j+1)^2}, \frac{2}{2j+1}\sin(\frac{2j+1}{2}\pi)\right)$$

e

$$||P_j - P_{j-1}|| \geq \left|(-1)^j\frac{2}{2j+1} + (-1)^j\frac{2}{2j-1}\right| = \frac{8j}{4j^2-1} \geq \frac{1}{j}$$

da cui $\sum_{j=2}^n ||P_j - P_{j-1}|| \geq \sum_{j=2}^n 1/j$. Mandando $n \to \infty$ e ricordando la definizione di lunghezza di una curva otteniamo la tesi.

Esercizio 5. *Stabilire se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $F(t) = (2\cos(2\arctan(t) + \pi/2), \cos(4\arctan(t) + \pi))$ é una immersione o una sommersione.*

Soluzione:

La mappa F non puó essere una sommersione per motivi dimensionali. La mappa F é una immersione in tutti i punti tranne quelli che verificano il seguente sistema: $\arctan(t) = \pi/2(k - 1/2)$, $\arctan(t) = \pi/8(k - 1/2)$. Tale sistema non ha nessuna soluzione e quindi F é una immesione.

Esercizio 6. *Data $F(x,y) = xy^4 + 2y + y\sin(x) + 2(e^x - x - 1)$ e $C_0 = \{F(x,y) = 0\}$. Provare che in un intorno di $(0,0)$ l'insieme C_0 puó essere rappresentato come grafico di $y = f(x)$. Calcolare $f'(0)$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.*

Soluzione:

Iniziamo osservando che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $(0,0) \in C_0$. Inoltre,

$$\nabla F(x,y) = (y^4 + y\cos(x) + 2(e^x - 1), 4xy^3 + 2 + \sin(x))$$

da cui $\nabla F(0,0) = (0,2)$ e quindi l'esistenza di f come sopra é garantita dal Teorema del Dini. Dal Teorema del Dini e denotando con F_x e F_y le derivate parziali di F lungo x e y rispettivamente abbiamo che

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

da cui $f'(0) = 0$. Infine

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}\right) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

da cui $f''(0) = -1$. Applicando il Teorema di De l'Hopital abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

e quindi anche il limite cercato vale $-1/2$.

Esercizio 7. *Data la curva piana di sostegno $\gamma = \{(x, 0, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, sia S la superficie di rotazione generata da γ rispetto all'asse z.*
Stabilire: forma parametrica di S, forma cartesiana di S e punti di singolarità .

Soluzione:

Una parametrizzazione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ di γ è $\alpha(t) = (t, 0, e^t)$. Dunque una parametrizzazione di S è data da:

$$\Sigma : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \qquad \Sigma(t, s) = (t\cos(s), t\sin(s), e^t).$$

In forma cartesiana S è rappresentata dalle equazioni $z = e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$.
Per studiare la regolarità della superficie si considera la matrice jacobiana:

$$J_\Sigma(s,t) = \begin{pmatrix} \cos(s) & -t\sin(s) \\ \sin(s) & t\cos(s) \\ e^t & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango massimo tranne che per $t = 0$ e perciò il punto $(0, 0, 1)$ è l'unico punto singolare.

Esercizio 8. *Data la curva piana di sostegno $\gamma = \{(x, y, 0) : xy = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, sia S la superficie di rotazione generata da γ rispetto all'asse y.*
Stabilire: forma parametrica di S, forma cartesiana di S e punti di singolarità .

Soluzione:

Una parametrizzazione $\alpha : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ di γ è $\alpha(t) = (t, 1/t, 0)$. Dunque una parametrizzazione di S è data da:

$$\Sigma : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \qquad \Sigma(t, s) = (t\cos(s), 1/t, t\sin(s)).$$

In forma cartesiana S è rappresentata dalle equazioni $\pm y = \sqrt{x^2 + z^2}$. S può anche essere espressa come unione dei garfici delle funzioni $f_\pm(x, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}$ oppure come controimmagine di 1 rispetto alla funzione $F(x, y, z) = y^2(x^2 + z^2)$.
Verificare che la matrice jacobiana $J_\Sigma(t, s)$ ha rango massimo per ogni (t, s) è elementare.

Esercizio 9. *Si consideri la superficie in forma parametrica $\Sigma(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$ $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Verificare che si tratta di superficie regolare e calcolare il versore normale alla superficie in ogni punto.*

Soluzione:

Le linee coordinate passanti per il punto $\Sigma(u_0, v_0)$ sono (in forma parametrica) la retta:

$$\alpha_1 : \mathbb{R} \ni u \mapsto (u\cos(v_0), u\sin(v_0), v_0)$$

e l'elica cilindrica:

$$\alpha_2 : \mathbb{R} \ni v \mapsto (u_0\cos(v), u_0\sin(v), v),$$

pertantanto la superficie è un elicoide.
I vettori tangenti alle linee coordinate nel punto $\Sigma(u_0, v_0)$ sono:

$$T_1(u_0, v_0) = \alpha_1'(u_0) = (\cos(v_0), \sin(v_0), 0) \quad e \quad T_2(u_0, v_0) = \alpha_2'(v_0) = (-u_0\sin(v_0), u_0\cos(v_0), 1).$$

Il vettore normale alla superficie è :

$$N(u, v) = T_1(u, v) \wedge T_2(u, v) = (\sin(v), -\cos(v), u),$$

La superficie risulta essere regolare e il versore normale in ogni punto è :

$$n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} N(u, v)$$

Esercizio 10. *Siano $0 < b < a$. Si consideri la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse delle z la curva in forma parametrica $\gamma(t) = (0, a + b\sin(t), b\cos(t))$ $t \in \mathbb{R}$. Verificare che si tratta di superficie regolare.*

Soluzione:
Si verifica che la parametrizzazione della superficie ottenuta é:

$$r(\vartheta, t) = ((a + b\sin(t))\cos(\vartheta), (a + b\sin(t))\sin(\vartheta), b\cos(t)) \quad (\vartheta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Per studiare la regolarità della superficie si considera la matrice:

$$J_\Sigma(\vartheta, t) = \begin{pmatrix} -(a + b\sin(t))\sin(\vartheta) & (a + b\sin(t))\cos(\vartheta) & 0 \\ b\cos(t)\cos(\vartheta) & b\cos(t)\sin(\vartheta) & -b\sin(t) \end{pmatrix}$$

che ha rango massimo. Da cui segue che la parametrizzazione é regolare.