Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 3

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

in $[1,+\infty)$.

Soluzione:

Dato che $\frac{1}{n(1+nx^2)} \sim \frac{1}{n^2x^2}$ per $n \to +\infty$, la serie converge puntualmente per il criterio del confronto asintotico. Definito:

$$M_n := \sup_{x\in[1,+\infty)} \left| \frac{1}{n(1+nx^2)} \right| = \frac{1}{n(1+n)},$$

la serie numerica $\sum_n M_n$ converge. La serie di funzioni in esame converge totalmente quindi uniformemente.

Esercizio 2. *Data la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - |x| & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} f(x-n)$.

Soluzione:

Sia $u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} f(x-n)$. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste *al più* un valore $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $u_{n_0}(x) \neq 0$, si ha la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_{n_0}(x).$$

Verifichiamo esplicitamente la convergenza uniforme della successione delle somme parziali:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = 0.$$

La serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^{-1}x^n - (n+1)^{-1}x^{n+1}],$$

nell'intervallo $[-1,1]$.

Soluzione:

Si tratta di una serie telescopica $\sum_n [f_n(x) - f_{n+1}(x)]$ quindi la successione delle somme parziali è semplice da ricavare:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} [k^{-1}x^k - (k+1)^{-1}x^{k+1}] = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = x$ per ogni $x \in [-1,1]$, la serie converge puntualmente a $f(x) = x$ in $[-1,1]$. Si verifica immediatemente che la serie converge uniformemente in tale intervallo, in quanto:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Esercizio 4. *Studiare convergenza puntuale e uniforme delle serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} (x-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

Soluzione:

Si determina facilmente che il raggio di convergenza della prima serie di potenze é $R = +\infty$ da cui si conclude che essa converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ e uniformemente in $[-k,k]$ $\forall k > 0$.
Posto $y = x - 1$ otteniamo che la serie data si riscrive come $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} y^n$. Si determina facilmente che il raggio di convergenza é $R = 1$. Inoltre, ricordando che $a^{\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ se $n \to \infty$ abbiamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ converge e quindi converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} (-1)^n$ (perché?). Si conclude che la serie data converge puntualmente e uniformemente in $[0,2]$.
Si determina facilmente che il raggio di convergenza della terza serie di potenze é $R = 0$. Pertanto essa converge puntualmente in $x = 0$.

Esercizio 5. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x-1)^n$$

Soluzione:

Il raggio di convergenza è $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2$ e quindi, per ora, si può concludere che la serie di potenze converge puntualmente per $|x - 1| < 2$, ovvero nell'intervallo $(-1,3)$. Per $x = 1$, la serie a segno alterno $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge (criterio di Leibniz) mentre per $x = 3$ si ottiene la serie armonica che è divergente. La serie converge uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1, 3-\epsilon]$ con $0 < \epsilon \leq 2$.

Esercizio 6. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} (x+1)^n$$

Soluzione:

Il raggio di convergenza è $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\log^2(n+1)}{n \log^2 n} = 1$ e pertanto si ha convergenza puntuale in $(-2,0)$. Negli estremi dell'intervallo si ottengono la serie convergente $\sum_n \frac{(-1)^n}{n \log^2 n}$ e la serie convergente $\sum_n \frac{1}{n \log^2 n}$. La serie di potenze converge uniformemente in $[-2,0]$.

Esercizio 7. *Studiare convergenza puntuale e uniforme delle serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n))^n x^n.$$

Soluzione:

Poiché il limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sin(n)|}$ non esiste (perché?) non possiamo concludere nulla. Per il calcolo del raggio di convergenza dobbiamo quindi usare la definizione

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n))^n x^n \text{ converge}\}.$$

Poiché la serie di potenze converge puntualmente in $|x| < 1$ e non converge in $|x| \geq 1$ (perché?) ne segue che

$$\sup\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n))^n x^n \text{ converge}\} = (-1, 1)$$

da cui $R = 1$. La serie converge puntualmente in $(-1, 1)$ e uniformemente in $[-k, k]$ per ogni $0 < k < 1$.

Esercizio 8. *Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n}{e^{2n} + 2^n} x^{2n} (\log |x|)^n$$

Soluzione:

Effettuando la sostituzione $y = x^2 \log |x|$ si studia la serie di potenze $\sum_n \frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} y^n$, il cui raggio di convergenza è $R = e^2$. Per $y = e^2$ si ottiene la serie $\sum_n \frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} e^{2n}$ che non converge dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} e^{2n} \neq 0$. Quindi la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} x^{2n} (\log |x|)^n$ converge puntualmente in $(-e, e)$ e uniformemente in ogni intervallo $[-e + \epsilon, e - \epsilon]$ con $0 < \epsilon < e$.