Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 8

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione di periodo* 2π *definita da* $f(x) = x$ *per* $x \in (-\pi, \pi]$*. Si determinino la serie di Fourier di* f *e la somma della serie numerica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*.*

Soluzione:

f è dispari quindi $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Mentre gli altri coefficienti di Fourier si calcolano esplicitamente:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

La serie di Fourier di f è :

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx),$$

che converge puntualmente a f per $x \neq (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e a 0 per $x = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Per il calcolo della somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ si può utilizzare l'identità di Parseval:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 2. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione di periodo* 2π *definita da* $f(x) = |x|$ *per* $x \in (-\pi, \pi]$*. Si determinino la serie di Fourier di* f *e la somma della serie numerica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$*.*

Soluzione:

f è pari quindi $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Mentre gli altri coefficienti di Fourier si calcolano esplicitamente:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1).$$

$a_n = 0$ per n pari e $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ per n dispari, quindi la serie di Fourier di f è :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)x],$$

che converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$, in particolare:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 3. *Determinare la serie di Fourier di* $f(x) = 2 + \sin x + 3\cos(2x)$*.*

Soluzione:

f è un polinomio trigonometrico quindi si possono identificare direttamente i suoi coefficienti di Fourier:

$$a_0 = 4 \qquad a_n = \begin{cases} 3 & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di periodo 2π definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}$$

Determinare a quale funzione $g = g(x)$ la serie di Fourier di f converge puntualmente in $[-\pi, \pi]$.

SOLUZIONE:

f è continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ed in $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ mentre in $\pm\frac{\pi}{2}$ presenta discontinuità :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0.$$

Pertanto nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la serie di Fourier converge puntualmente ad f per $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ mentre converge al valore $\frac{1}{2}$ per $x = \pm\frac{\pi}{2}$. La funzione limite cercata è quindi $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \\ \frac{1}{2} & x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Esercizio 5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di periodo 2π definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} x \cos x & -\pi \le x < \pi \\ \pi & x = \pi \end{cases}$$

Discutere convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier di f.

SOLUZIONE:

f è continua in ogni intervallo $((2k+1)\pi, (2k+3)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, quindi la serie di Fourier ivi converge puntualmente a f. Mentre nei punti $x_k = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ f presenta discontinuità e:

$$\lim_{x \to x_k^-} f(x) = -\pi \qquad \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La serie di Fourier di f converge a 0 per $x \in \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
Poiché f è di classe $\mathcal{C}^1$ in ogni intervallo $((2k+1)\pi, (2k+3)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier converge uniformemente a f in ogni intervallo $[a, b]$ con $(2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 6. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di periodo 2π definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} -x\pi & -\pi \le x \le 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Discutere convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier di f.

SOLUZIONE:

Osservando che la funzione è continua in 0 e che:

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi^2,$$

si può concludere che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. La serie di Fourier converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$.
Si consideri:

$$f'(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

essendo:

$$\lim_{x \to -\pi^+} f'(x) = -\pi \qquad \lim_{x \to \pi^+} f'(x) = 2\pi,$$

si ha che f è di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti su $\mathbb{R}$. La serie di Fourier converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.