Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 5

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Stabilire se $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2-1)^{-1} \in \mathbb{Z}\}$ è aperto, chiuso, compatto nella topologia euclidea.*

Soluzione:

Osserviamo che $(x,y) \in X$ se e solo se esiste $\kappa \in \mathbb{Z}$ tale che $\frac{1}{x^2+y^2-1} = k$. In altre parole X è l'unione di tutte le circonferenze centrate nell'origine di raggio $\sqrt{1+\frac{1}{k}}$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
X non è chiuso, infatti la successione $\left\{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}, 0\right)\right\}_{n\geq 1} \subset X$ converge a $(1,0)$, punto che non appartiene a X. Inoltre X non è compatto.
Se X è aperto allora $X \cap \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ è aperto di $\mathbb{R}$, ma si verifica esplicitamente che $Z = \left\{x = \pm\sqrt{1+\frac{1}{k}} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ non è un aperto (ad esempio, si può osservare che $\sqrt{2} \in Z$ ma non è punto interno), di conseguenza X non è aperto.

Esercizio 2. *Stabilire se $X = \{xe^{ix} : x > 0\}$ è aperto, chiuso, compatto nella topologia euclidea di $\mathbb{C}$.*

Soluzione:

X non è chiuso, infatti $0 \in \mathbb{C}$ è punto di accumulazione ma $0 \notin X$. Per verificare che 0 è di accumulazione basta osservare che $B_\epsilon(0) \cap X = \{xe^{ix} : 0 < x < \epsilon\} \neq \emptyset$ per ogni $\epsilon > 0$.
Tramite le coordinate polari $\mathbb{C}$ si identifica con $(0,\infty) \times [0, 2\pi)$ e $X = \{(\rho, \vartheta) : \rho = \vartheta\}$ non è aperto di $(0,\infty) \times [0, 2\pi)$.

Esercizio 3. *Studiare la continuità della seguente funzione sul suo dominio:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{|x|x}(y^2+y^4) & x \neq 0 \\ y^2+y^4 & x = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

$\mathbb{R}^2$ è il dominio di f e $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\})$ in quanto composizione di funzioni continue. Studiamo la continuità di f in corrispondenza adi $x = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_A(x,y) = y_0^2 + y_0^4 \qquad A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_B(x,y) = -y_0^2 - y_0^4 \qquad B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$$

f non è continua in $\{(0,y) : y \neq 0\}$. Esaminando la continuità in $(0,0)$ abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, in quanto $|\sin x| \leq |x|$ e quindi $|f(x,y)| \leq y^2 + y^4$. Risulta $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y), y \neq 0\})$.

Esercizio 4. *Studiare la convergenza puntuale e uniforme di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n}$ in $[1,\infty)$.*

Soluzione:

Fissato $x \in [1,\infty)$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} e^{-x^2} = e^{-x^2} < 1$$

ne segue che la serie converge puntualmente in $[1,\infty)$. Poiché $x \geq 1$ si ha che $e^{-nx^2} \leq e^{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{1+n}$$

si vede facilmente che la serie a destra converge e quindi la serie di funzioni converge uniformemente in $[1,\infty)$ per il criterio di Weiestrass.

Esercizio 5. *Studiare la convergenza puntuale e uniforme di* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}$.

Soluzione:

Posto $y = x-1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n n}$$

il cui raggio di convergenza vale $R = 2$. Perció la serie di partenza converge puntualmente in $(-1,3)$. Se $x = 3$ allora la serie diverge, mentre se $x = -1$ la serie converge per il criterio di Leibnitz. Ne concludiamo che la serie data converge puntualmente in $[-1,3)$. Usando il criterio di Abel, si vede facilmente che la serie converge uniformemente in $[-1, 3-a]$ per ogni $0 < a < 2$.

Esercizio 6. *Dimostrare che* $f_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2}$*:*

- *converge a* 0 *puntualmente per ogni* $t \in \mathbb{R}$*;*
- *converge uniformemente in* $[1,+\infty)$*;*
- *NON converge uniformemente in* $[-1,1]$.

Soluzione:

Se $t = 0$ ovvio. Se $t \neq 0$ vale

$$0 < \left| \frac{nt}{1+n^2t^2} \right| \leq \frac{1}{n|t|}$$

e la tesi segue per il Teorema dei due carabinieri. Osserviamo che

$$f_n'(t) = \frac{n - n^3t^2}{(1+n^2t^2)^2} < 0 \quad \forall x \in [1,\infty)$$

da cui

$$\sup_{[1,\infty)} |f_n(t)| = f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \to 0 \qquad \text{quando} \qquad n \to \infty.$$

e quindi la successione converge uniformemente in $[1,\infty)$. Si verifica che

$$\sup_{[-1,1]} |f_n(t)| = \frac{1}{2}$$

e quindi la successione non converge uniformemente in $[-1,1]$.

Esercizio 7. *Determinare la serie di Fourier della funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ottenuta estendendo per periodicitá la funzione* $f(x) = x\sin(x)^2$ *in* $[-\pi,\pi]$.

Soluzione:

Poiché la funzione é dispari abbiamo che $a_n = 0$ for every $n = 0,1,\ldots$. Calcoliamo

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin^2(x)\sin(nx)dx = I_1 - I_2$$

dove

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

e

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\cos(2x)dx.$$

Una semplice integrazione per parti permette di concludere che

$$I_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ricordando le formule di Werner otteniamo

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin((n+2)x)dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin((n-2)x)dx$$

e si conclude integrando per parti. Fare attenzione al caso $n = 2$.