Università degli Studi di Trento

**CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA**

DAVIDE PASTORELLO A ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 3

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

**Esercizio 1.** *Calcolare la derivata direzionale in* $(0,0)$ *della funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha-1}y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*lungo* $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, *al variare del parametro* $\alpha > 1$.

SOLUZIONE:
Calcolando esplicitamente $D_v f(0,0)$ secondo la sua definizione si ottiene che:

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} \nexists & \alpha < 3 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha > 3 \end{cases}$$

**Esercizio 2.** *Stabilire se la seguente funzione è continua, derivabile e differenziabile nell'origine:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \text{ oppure } y = 0 \\ 0 & |y| \leq x^2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:
Considerando le restrizioni della funzione $f_{|A}$ e $f_{|B}$ con $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$ e $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = x^3\}$ si ottiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|A}(x,y) = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|B}(x,y) = 0,$$

di conseguenza la funzione non è continua nell'origine e quindi nemmeno differenziabile. Questo fatto non esclude che essa possa essere derivabile in $(0,0)$, infatti basta notare che $f(x,0) = 1$ e quindi $D_x f(0,0) = 0$ mentre la derivata parziale rispetto a $y$ in $(0,0)$ è :

$$D_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Le derivate parziali esistono nulle in $(0,0)$, $f$ è derivabile nell'origine.

**Esercizio 3.** *Studiare continuità , derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{|xy|}-1)^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*al variare del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE:
Osservando che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{|xy|}-1)^\alpha}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$$

e passando alle coordinate polari si ha che $\lim_{\rho\to 0} \rho^{2\alpha-2}|\cos\vartheta \sin\vartheta|^\alpha = 0$ (uniformemente in $\vartheta$) se e solo se $2\alpha - 2 > 0$, ovvero $f$ è continua in $(0,0)$ per $\alpha > 1$.
Per verificare la derivabilità in $(0,0)$ si considerano i limiti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

La funzione $F(h) := f(h,0) = f(0,h)$ è la funzione nulla per $\alpha > 0$ in questo caso i limiti esistono nulli. $F(h) = 1/h^2$ per $\alpha = 0$ e quindi i limiti sopra non esistono finiti e per $\alpha < 0$ la funzione $F$ non è definita.
Dunque $f$ risulta derivabile nell'origine per $\alpha > 0$ con derivate parziali $D_x f(0,0) = 0$ e $D_y f(0,0) = 0$.
Per verificare la differenziabilità in $(0,0)$ si va a considerare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{|xy|}-1)^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

analogamente a quanto visto in precedenza, in coordinate polari si ha che $\lim_{\rho\to 0} \rho^{2\alpha-3}|\cos\vartheta \sin\vartheta|^\alpha = 0$ (uniformemente in $\vartheta$) se e solo se $2\alpha - 3 > 0$ e quindi $f$ è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha > \frac{3}{2}$.

**Esercizio 4.** *Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come segue:*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2(\exp[y^2]-1)z^4}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z,) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z,) = (0,0,0) \end{cases}$$

*Inoltre stabilire se $f$ è derivabile e differenziabile in* $(0,0,0)$.

Soluzione:
$f$ è continua su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ in quanto composizione di funzioni continue. Si rende necessario controllare la continuità in corrispondenza dell'origine:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2(\exp[y^2]-1)z^4}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^4}{x^2+y^2+z^2} = 0,$$

infatti utilizzando le coordinate sferiche $x = \rho\cos\vartheta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, si osserva che:

$$\left|\frac{\rho^8 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \cos^4\varphi \sin^4\varphi}{\rho^2}\right| \leq \rho^6 \to 0 \quad \text{per} \quad \rho \to 0.$$

$f$ è continua su $\mathbb{R}^3$.
Osservando che $f(0,y,z) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0$ si conclude che $f$ è derivabile nell'origine con $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$. Tenendo presente che $|\rho^5 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \cos^4\varphi \sin^4\varphi| \leq \rho^5 \to 0$ si deduce che $f$ è anche differenziabile nell'origine.

**Esercizio 5.** *Studiare continuità , derivabilità e differenziabilità della seguente funzione sul suo dominio:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2}(\sin(xy) - xy) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Soluzione:
Il dominio di $f$ è $D(f) = \mathbb{R}^2$ ed è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Per verificare la continuità in corrispondenza della retta $x = 0$ esaminiamo il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{y}{x^2}\left(-\frac{x^3y^3}{6}\right) = 0 \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R}.$$

$f$ è continua. Calcoliamo le derivate parziali di $f$ per $x \neq 0$:

$$D_x f(x,y) = -\frac{2xy}{x^4}(\sin(xy) - xy) + \frac{y}{x^2}(y\cos(xy) - xy),$$

$$D_y f(x,y) = \frac{\sin(xy) - xy}{x^2} + \frac{y}{x^2}(x\cos(xy) - x),$$

e le derivate parziali per $x = 0$:

$$D_x f(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = -\frac{y^4}{6},$$

$$D_y f(0,y) = 0.$$

Risulta che $f$ è ovunque derivabile. Le funzioni $D_x f$ e $D_y f$ sono continue su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ e osservando che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} D_x f(x,y) = -\frac{y_0^4}{6} = D_x f(0,y_0) \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} D_y f(x,y) = 0 = D_y f(0,y_0) \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R},$$

concludiamo che $D_x f$ e $D_y f$ sono continue anche sull'asse y. Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ essa è differenziabile ovunque per il teorema del differenziale totale.

**Esercizio 6.** *Data*

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

*si verifichi che non  differenziabile in* $(0,1)$ *e calcolare* $D_v f(0,1)$ *dove* $v$ *indica un generico versore di* $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

E' facile vedere che $D_x f(0,1) = 0 = D_y f(0,1)$. Dunque se f fosse differenziabile in $(0,1)$ avremmo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,1+y) - f(0,1) - \langle \nabla f(0,1), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ma tale limite non é zero come é facile vedere muovendosi lungo la direzione $y = x$. Dato $v = (\alpha, \beta)$ vale

$$D_v f(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\alpha, h\beta+1) - f(0,1)}{h} = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}.$$