Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 7

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Data la parametrizzazione di curva* $\alpha : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $\alpha(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t)$, *verificare che la curva è regolare, calcolarne la lunghezza e determinare la retta tangente alla curva nel punto* $\alpha(0)$.

Soluzione:
Poiché $\alpha \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$ e $\| \alpha'(t) \| = \sqrt{2}e^t \neq 0$ per ogni $t \in [-2\pi, 2\pi]$, la curva è regolare e, detto γ il suo sostegno, la sua lunghezza è data da:

$$l(\gamma) = \sqrt{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^t \, dt = \sqrt{2}(2^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

La retta tangente a γ in $\alpha(0)$ è data dalla parametrizzazione: $r(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0) = (1 + t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$. In forma cartesiana è la retta $y = x - 1$.

Esercizio 2. *Calcolare la lunghezza della curva data dalla parametrizzazione* $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *con* $\alpha(\vartheta) := ((1 + \cos\vartheta)\cos\vartheta, (1 + \cos\vartheta)\sin\vartheta)$.

Soluzione:
Si tratta di una parametrizzazione in coordinate polari della forma $\alpha(\vartheta) = (\rho(\vartheta)\cos\vartheta, \rho(\vartheta)\sin\vartheta)$, con $\rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$. Avendo $\| \alpha' \| = \sqrt{[\rho'(\vartheta)]^2 + [\rho(\vartheta)]^2}$, la lunghezza della curva è :

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} \, dt = 4 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \, dt = 8.$$

Esercizio 3. *Sia* $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma := S_1 \cap S_2$, *dove*

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y^2\} \quad e \quad S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Determinare una parametrizzazione dell'arco di γ *che congiunge i punti* $(1, -1, \sqrt{2})$ *e* $(4, 2, \sqrt{20})$ *quindi stabilire se l'arco è regolare.*

Soluzione:
Una parametrizzazione dell'arco di curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si può ottenere imponendo che $x(t) = y(t)^2$ e $z(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, a questo punto una scelta conveniente è porre $y(t) = t$. Per cui: $\alpha(t) = (t^2, t, \sqrt{t^4 + t^2})$. L'intervallo di parametrizzazione $[a, b]$ si determina imponendo $\alpha(a) = (1, -1, \sqrt{2})$ e $\alpha(b) = (4, 2, \sqrt{20})$, da cui $a = -1$ e $b = 2$. L'arco di curva parametrizzato da α non è regolare in quanto

$$z'(t) = \frac{t}{|t|} \frac{1 + 2t}{\sqrt{1 + t^2}},$$

non è continua in $t = 0$.

Esercizio 4. *Verificare che l'equazione:*

$$(x-1)\log(\sin y)+(y-1)tg(x^2)=0$$

definisce implicitamente una funzione $\varphi : U \to V$ *con* $U \times V$ *intorno del punto* $(1,1)$ *e calcolare* $y'(1)$*.*

SOLUZIONE:
Sia $F(x,y) := (x-1)\log(\sin y)+(y-1)\mathrm{tg}(x^2)$, le sue derivate parziali sono:

$$D_xF(x,y)=\log(\sin y)+(y-1)\frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$D_yF(x,y)=(x-1)\frac{\cos y}{\sin y}+\mathrm{tg}(x^2)$$

F è di classe $\mathcal{C}^1$in un intorno di $(1,1)$, $F(1,1)=0$ e $D_yF(1,1)=\mathrm{tg}1\neq 0$. Per il teorema di Dini esiste un intorno $U\times V$ di $(1,1)$ e una funzione $\varphi : U \to V$ tale che $F(x,\varphi(x))=0$. φ è derivabile e:

$$\varphi'(1)=-\frac{D_xF(1,1)}{D_yF(1,1)}=-\frac{\log(\sin 1)}{\mathrm{tg}1}.$$

Esercizio 5. *Verificare che l'equazione:*

$$\frac{x^2}{2}+xy-\log(1+x^2+y^2)+y=0$$

definisce implicitamente una funzione $\varphi : U \to V$*, con* $U \times V$ *intorno del punto* $(0,0)$*. Verificare che* 0 *è un punto stazionario per* φ *e determinarne la natura.*

SOLUZIONE:
Sia $F(x,y) := \frac{x^2}{2}+xy-\log(1+x^2+y^2)+y$. $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0,0)=0$ e:

$$D_xF(x,y)=x+y-\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$D_yF(x,y)=x-\frac{2y}{1+x^2+y^2}+1$$

da cui: $D_xF(0,0)=0$ e $D_yF(0,0)=1$. Il teorema di Dini garantisce l'esistenza della funzione implicita φ. Inoltre:

$$\varphi'(0)=-\frac{D_xF(0,0)}{D_yF(0,0)}=0,$$

il punto $x=0$ è punto stazionario.

$$\varphi''(x)=-\frac{[D_x^2F(x,\varphi(x))+D_{yx}^2F(x,\varphi(x))\varphi'(x)]D_yF(x,\varphi(x))-D_xF(x,\varphi(x))[D_{xy}^2F(x,\varphi(x))+D_y^2F(x,\varphi(x))\varphi'(x)]}{(D_yF(x,\varphi(x)))^2}$$

$$\varphi''(0)=-D_x^2F(0,0)D_yF(0,0).$$

Poiché $D_x^2F(0,0)=-1$, si ottiene $\varphi''(0)=1>0$. Il punto $x=0$ è di minimo per φ.

Esercizio 6. *Sia dato il punto* $P=(3,-1,1)\in\mathbb{R}^3$ *e l'equazione*

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+1=0\ .$$

Verificare che l'equazione definisce in un intorno del punto P *un'unica funzione* $z=f(x,y)$*. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di* f *in* P*.*

Soluzione:

Verifichiamo le ipotesi del teorema della funzione implicita di Dini. Innanzitutto osserviamo che $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ed ha gradiente:

$$\nabla F(x,y,z) = (2x-2, 2y+2, 2z-4) \quad , \quad \nabla F(P) = (4,0,-2).$$

Avendo $F(P) = 0$ e $D_zF(P) \neq 0$ il teorema di Dini ci permette di concludere che esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^2$ di $(3,-1)$, un intorno $I \subset \mathbb{R}$ di 1 e un'unica funzione $f : U \to I$ tale che nell'intorno $U \times I$ di P l'insieme di punti che soddisfano $F(x,y,z) = 0$ coincide con il grafico di f. Inoltre f risulta essere di classe C^1 con derivate prime:

$$D_x f(x,y) = -\frac{D_xF(x,y,f(x,y))}{D_zF(x,y,f(x,y))} \quad , \quad D_y f(x,y) = -\frac{D_yF(x,y,f(x,y))}{D_zF(x,y,f(x,y))}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(3,-1,1)$ è data da

$$z = 1 + D_x f(3,-1)(x-3) + D_y f(3,-1)(y+1),$$

da quanto scritto sopra si ha $D_x f(3,-1) = 2$ e $D_y f(3,-1) = 0$ e quindi:

$$z = 2x - 5.$$