Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 8

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Considerata l'elica cilindrica definita dalla parametrizzazione* $\alpha(t) = (R, \cos t, R \sin t, ht)$ *con* $t \in [0, 2\pi]$*,* $R, h \in \mathbb{R}^+$*, ri-parametrizzare la curva in termini dell'ascissa curvilinea e calcolarne versore tangente, versore normale, curvatura e torsione.*

Soluzione:

Dato che $\| \alpha'(t) \| = \sqrt{R^2 + h^2}$, si calcola $s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2+h^2}\, du = \sqrt{R^2+h^2}\, t$, la cui funzione inversa è $t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, per cui la parametrizzazione nell'ascissa curvilinea $\beta : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}^3$ è :

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left(R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), h\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}} \right),$$

il versore tangente è :

$$T(s) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \right),$$

la curvatura è :

$$k(s) = \frac{R}{R^2+h^2}$$

il versore normale è :

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), 0 \right),$$

Il valore della torsione lo si può identificare nella derivata prima del versore binormale $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ (dopo averlo calcolato!), ricavando:

$$\tau(s) = -\frac{h}{R^2+h^2}.$$

Esercizio 2. *Data la curva* $\gamma \subset \mathbb{R}^2$*, parametrizzata da* $\alpha(\vartheta) = (\cos^2(\vartheta), \cos(\vartheta)\sin(\vartheta))$ *con* $\vartheta \in [0, \pi]$*, calcolarne lunghezza, versore tangente e curvatura.*

Soluzione:

$\alpha'(\vartheta) = (-\sin(2\vartheta), \cos(2\vartheta))$, quindi la curva è regolare. La lunghezza è :

$$l(\gamma) = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(2\vartheta) + \cos^2(2\vartheta)}\, d\vartheta = \pi,$$

il versore tangente è :

$$T(\vartheta) = (-\sin(2\vartheta), \cos(2\vartheta))$$

e la curvatura è :

$$k(\vartheta) = \frac{\| T'(\vartheta) \|}{\| \alpha'(\vartheta) \|} = 2.$$

Concludiamo che la curva è una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centro $(1/2, 0)$.

Esercizio 3. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy.$$

SOLUZIONE:
$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$. I punti stazionari sono $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ e $(0, 0)$. La matrice hessiana è :

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}.$$

$Hf(0, 0)$ è non definita e $Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è definita negativa quindi l'origine è punto di sella mentre il secondo punto stazionario è punto di massimo relativo. f non presenta punti di massimo e minimo globale.

Esercizio 4. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y) = e^y(x^2 + 1) - y.$$

SOLUZIONE:
$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla f(x, y) = (2xe^y, (x^2 + 1)e^y - 1)$. L'unico punto stazionario è $(0, 0)$. La matrice hessiana è :

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & (x^2 + 1)e^y \end{pmatrix}.$$

$Hf(0, 0)$ è definita positiva quindi $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto e $\min_{\mathbb{R}^2} f = 1$.

Esercizio 5. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{2} + y^2 - 2$$

SOLUZIONE:
Il gradiente della funzione per $(x, y) \neq (0, 0)$ è :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y \right),$$

è immediato notare la non esistenza di punti critici. Ricordiamo che per una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se $\lim_{\|p\| \to +\infty} f(p) = +\infty$ allora $\exists \min_{\mathbb{R}^n} f$. Utilizzando le coordinate polari nel caso in esame:

$$\lim_{\rho \to +\infty} \rho + \frac{\rho}{2} \cos \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta - 2 = +\infty.$$

f ammette minimo assoluto: $\min_{\mathbb{R}^2} f = f(0, 0) = -2$.

Esercizio 6. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione:*

$$f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2 y^2.$$

SOLUZIONE:
La funzione in esame è di classe C^∞ sul dominio $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$.
Il gradiente $\nabla f(x, y) = \left(2x \log(1 + y) + 2xy^2, \frac{x^2}{1+y} + 2yx^2\right)$ si annulla in nei punti $(0, y)$, con $y > -1$, come è immediato verificare e $f(0, y) = 0$ per ogni $y > -1$. La matrice Hessiana risulta semidefinita in corrispondenza dei punti stazionari:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\log(1+y) + 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi non aiuta l'indagine. Mentre andando a valutare il segno della funzione f, ovvero il segno di $F(y) = \log(1+y) + y^2$, si ricava che: $F(y) < 0$ per $-1 < y < 0$, $F(y) = 0$ per $y = 0$ e $F(y) > 0$ per $y > 0$. Quindi: i punti $(0,y)$ sono di minimo locale per $y > 0$; $(0,0)$ è punto di sella; i punti $(0,y)$ sono di massimo locale per $-1 < y < 0$. La funzione non presenta punti di massimo e minimo globale non essendo limitata nè superiormente nè inferiormente:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} +\infty & y_0 > 0 \\ -\infty & -1 < y_0 < 0 \end{cases}$$