Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II - LAUREA IN FISICA

DAVIDE PASTORELLO E ANDREA PINAMONTI

Foglio di esercizi 9

Nota preliminare: Le risoluzioni degli esercizi presentati sono volutamente schematiche e vari dettagli sono lasciati al lettore.

Esercizio 1. *Date le funzioni:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(t,u) := \Big(\exp[tu], t^3 - u^4, \frac{u}{t^2}\Big)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad g(x,y,z) := x \log(1 + y^2 + z^2)$$

si calcoli il gradiente di $h := g \circ f$ *nel punto* $(1, 0)$.

Soluzione:

La matrice Jacobiana di f è :

$$Jf(t,u) = \begin{pmatrix} u\exp[tu] & t\exp[tu] \\ 3t^2 & -4u^3 \\ -\frac{2u}{t^3} & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

e il gradiente di g è $\nabla g(x,y,z) = \Big(\log(1+y^2+z^2), \frac{2xy}{1+y^2+z^2}, \frac{2xz}{1+y^2+z^2}\Big)$.

$$\nabla h(1,0) = \nabla g(f(1,0)) Jf(1,0) = (\log 2, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3, \log 2).$$

Esercizio 2. *Studiare i punti stazionari della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x + 1$$

Soluzione:

f presenta un unico punto stazionario $P = (1, 1, -1/2)$. La matrice Hessiana è :

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(H_f(P)) = -20$, per il criterio dei minori principali di nord-ovest la matrice risulta essere non definita quindi P è di sella.

Esercizio 3. *Studiare i punti stazionari della funzione*

$$f(x,y,z) = x^3 - y^3 + xy + z^2$$

Soluzione:

f presenta due punti stazionari $P = (0, 0, 0)$ e $Q = (1/3, -1/3, 0)$. La matrice Hessiana è :

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(H_f(P)) = -2$, per il criterio dei minori principali di nord-ovest la matrice risulta essere non definita quindi P è di sella. Inoltre

$$H_f(Q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché i determinanti di tutti i minori di nord-ovest sono strettamente positivi la matrice é definita positiva e quindi Q è di minimo locale.

Esercizio 4. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = \frac{z(x + y) + xy + x^2y^2z^2}{xyz}.$$

Soluzione:

$D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ OR } y = 0 \text{ OR } z = 0\}$ su cui la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$. La funzione può essere scritta nella forma $f(x, y, z) = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} + xyz$ e il suo gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = \big(- x^{-2} + yz\, , \, -y^{-2} + xz\, , \, -z^{-2} + xy \big)$$

si annulla nei punti $(1, 1, 1,)$ e $(-1, -1, -1)$. La matrice hessiana è :

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^{-3} & z & y \\ z & 2y^{-3} & x \\ y & x & 2z^{-3} \end{pmatrix}.$$

$Hf(1, 1, 1)$ è la matrice con 2 in diagonale e 1 fuori diagonale, il suo determinante è 4 quindi positivo. I determinanti delle due sottomatrici quadrate di nord-ovest sono i numeri positivi 2 e $\det \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 3$ quindi $Hf(1, 1, 1)$ è definita positiva e $(1, 1, 1)$ risulta essere un punto di minimo locale. Per simmetria di f il punto $(-1, -1, -1)$ è di massimo locale. Non ci sono punti di estremo globale.

Esercizio 5. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2(y - 1)^3(z + 2)^2$$

Soluzione:

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\nabla f(x, y, z) = \big(2x(y-1)^3(z+2)^2\, , \, 3x^2(y-1)^2(z+2)^2\, , \, 2x^2(y-1)^3(z+2)\big)$. I punti stazionari sono $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y, -2) : x, y \in \mathbb{R}\}$ in corrispondenza dei quali f è nulla. Osservando che $f(x, y, z) \leq 0$ per $y < 1$ e $f(x, y, z) \geq 0$ per $y > 1$, si conclude che il punto stazionario $(x, 1, z)$ è punto di sella $\forall x, z \in \mathbb{R}$. Per la stessa ragione i punti $(0, y, z)$ e $(x, y, -2)$ sono di massimo relativo per $y < 1$ e di minimo relativo per $y > 1$. La funzione non ammette punti di estremo globale.

Esercizio 6. *Studiare i punti di massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y) = \log(1 + x^2y^2).$$

Soluzione:

Poichè la funzione $t \to \log(t)$ è monotona strettamente crescente è sufficiente studiare la funzione $g(x, y) = 1 + x^2y^2$. I punti stazionari di tale funzione su gli assi coordinati ed è facile vedere che il test della matrice hessiana è inconcludente per questi punti. Passiamo dunque ad uno studio specifico. Notiamo che $g(x, y) \geq 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $g(0, y) = g(x, 0) = 1$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, ne segue che gli assi coordinati sono di minimo assoluto per g e dunque anche per f.

Esercizio 7. *Data*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Dimostrare che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$. *Dimostrare che* f *ammette minimo assoluto. Studiare i punti critici di* f.

SOLUZIONE:

Posto $x = t\xi$, $y = t\nu$ per $t \in \mathbb{R}$ e $\xi^2 + \nu^2 = 1$ abbiamo

$$f(t\xi, t\nu) = t^4(\xi^4 + \nu^4) - 2t^2(\xi - \nu)^2.$$

Detto $m > 0$ il minimo di $\xi^4 + \nu^4$ su $\xi^2 + \nu^2 = 1$ (perchè esiste?) e osservando che $|\xi - \nu| \leq 2$ abbiamo:

$$f(t\xi, t\nu) = t^4(\xi^4 + \nu^4) - 2t^2(\xi - \nu)^2 \geq t^4 m - 8t^2$$

da cui $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$. Poinchè vale il primo punto e f è continua abbiamo che f ammette minimo assoluto. I punti critici di f sono $P = (0, 0)$, $Q = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $T = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Poichè $f(0, 0) = 0$ e $f(Q) = f(T) = -10$ abbiamo che il minimo assoluto di f è -10. Il test della matrice hessiana è inconcludente per il punto $(0, 0)$. Passiamo dunque ad uno studio specifico.

$$f(x, mx) - f(0, 0) = x^2(x^2(1 + m^4) - 2(1 - m)^2), \quad m \in \mathbb{R}$$

quindi se $m \neq 1$ la quantita' $x^2(1+m^4) - 2(1-m)^2 < 0$ per x vicino a 0. D'altra parte $f(x, x) - f(0, 0) = 2x^4 > 0$. Ne segue che il punto $(0, 0)$ è di sella.