Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Nona lezione - 26/04/2018

1. Esercizi

Esercizio 1. *Si consideri la mappa*

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z)$$

e si definisca $Z(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x, y, z) = 0\}$ il luogo degli zeri di F.
Provare che $Z(F)$ coincide con il grafico di una funzione

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

in $U \times V$, ricordando che

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in U \times V \text{ tali che } z = f(x, y)\} \subset U \times V.$$

Dimostrare infine che il punto $O(0, 0)$ è un punto critico per f e stabilirne la sua natura locale.

Soluzione:

Osservazione 1. *Osserviamo subito che la prima richiesta dell'esercizio è equivalente a richiedere l'esistenza della funzione implicita f in un intorno di un punto $P \in \mathbb{R}^3$, zero per F ($P \in Z(F)$). In base a quanto richiesto nella seconda parte dell'esercizio, risulta naturale aspettarsi che tale punto sia $P(0, 0, z)$ tale che $P \in Z(F)$. Ciò accade se:*

$$F(P) = 0 \iff z^2 + \sin(z) = 0.$$

Possiamo quindi, ad esempio, scegliere come terza coordinata, $z = 0$.

Abbiamo così in realtà già verificato la prima ipotesi del Teorema delle funzioni implicite (caso generale scalare, con $N = 3$), cioè che $F(P) = 0$. Verifichiamo ora che anche la seconda ipotesi del teorema sia verificata per procedere. A tal fine, dobbiamo calcolarci il gradiente di F in P e verificare che non sia il vettore nullo. (Ricordiamo che non è essenziale che $D_zF(P) \neq 0$, ma è sufficiente che una delle tre derivate parziali non sia nulla in P).
Abbiamo che

$$\nabla F(x, y, z) = (D_xF(x, y, z), D_yF(x, y, z), D_zF(x, y, z)) = (2x, 8y + 8y^3, 2z + \cos(z))$$

In particolare:

$$\nabla F(P) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0).$$

Sia quindi nelle ipotesi del Teorema delle funzioni implicite. Ciò ci assicura l'esistenza di un intorno U del punto $(x_P, y_P) = (0, 0)$, un intorno V del punto $z_P = 0$ e l'esistenza della funzione implicita

$$f : U \to V$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

tali che

(1) $z_P = f(x_P, y_P)$ (in particolare, nel nostro caso, $0 = f(0, 0)$) e $z = f(x, y)$ $\forall (x, y, z) \in U \times V$;
(2) essendo $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \implies f \in C^\infty(U; V)$ e vale la seguente caratterizzazione delle derivate prime della funzione implicita f:

$$D_xf(x, y) = -\frac{D_xF(x, y, f(x, y))}{D_zF(x, y, f(x, y))}; \; D_yf(x, y) = -\frac{D_yF(x, y, f(x, y))}{D_zF(x, y, f(x, y))} \quad \forall (x, y) \in U.$$

Per concludere il primo punto dell'esercizio, dobbiamo verificare che $Z(F) = Gr(f)$ in $U \times V$.
Ciò è una diretta conseguenza della prima tesi del teorema essendo, in $U \times V$,

$$F(x, y, z) = 0 \iff F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Otteniamo così che

$$Q(x_Q, y_Q, z_Q) \in Z(F) \iff z_Q = f(x_Q, y_Q) \iff Q \in Gr(f) \ \forall Q \in U \times V$$

Passiamo ora alla seconda parte dell'esercizio. Per prima cosa, dobbiamo verificare che il punto $O(0, 0) \in U$ sia un punto critico di f. A tal fine calcoliamo in U:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = (D_x f(x,y), D_y f(x,y)) &= \left(-\frac{D_x F(x,y,f(x,y))}{D_z F(x,y,f(x,y))}, -\frac{D_y F(x,y,f(x,y))}{D_z F(x,y,f(x,y))}\right)\\ &= \left(-\frac{2x}{2z+\cos(z)}, -\frac{8y+8y^3}{2z+\cos(z)}\right) = \left(-\frac{2x}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))}, -\frac{8y+8y^3}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\nabla f(O) = (0, 0).$$

Per stabilire la natura del punto critico O, proviamo ad applicare il test dell'Hessiana. A tal fine, calcoliamoci le derivate seconde di f in U:

$$\begin{cases} D_x^2 f(x,y) = D_x(D_x f(x,y)) = D_x\left(-\dfrac{2x}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))}\right)\\ D_{xy}^2 f(x,y) = D_{yx}^2 F(x,y) = D_x(D_y f(x,y)) = D_x\left(-\dfrac{8y+8y^3}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))}\right)\\ D_y^2 f(x,y) = D_y(D_y f(x,y)) = D_y\left(-\dfrac{8y+8y^3}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))}\right)\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} D_x^2 f(x,y) = -\dfrac{2}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))} + \dfrac{2xD_x f(x.y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2}\\ D_{xy}^2 f(x,y) = D_{yx}^2 F(x,y) = -\dfrac{2xD_y f(x,y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2}\\ D_y^2 f(x,y) = -\dfrac{8+24y^2}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))} + \dfrac{(8y+8y^3)D_y f(x.y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2}\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} D_x^2 f(O) = D_x^2 f(0,0) = -2\\ D_{xy}^2 f(O) = D_{yx}^2 F(O) = D_{xy}^2 f(0,0) = 0\\ D_y^2 f(O) = D_y^2 f(0,0) = -8\end{cases}$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} Hf(x,y) &= \begin{vmatrix} D_{xx} f(x,y) & D_{xy} f(x,y)\\ D_{yx} f(x,y) & D_{yy} f(x,y)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -\frac{2}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))} + \frac{2xD_x f(x.y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2} & -\frac{2xD_y f(x,y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2}\\ -\frac{2xD_y f(x,y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2} & -\frac{8+24y^2}{2f(x,y)+\cos(f(x,y))} + \frac{(8y+8y^3)D_y f(x.y)(2-\sin(f(x,y)))}{(2f(x,y)+\cos(f(x,y)))^2}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

e, in particolare, che

$$Hf(O) = \begin{vmatrix} D_{xx} f(O) & D_{xy} f(O)\\ D_{yx} f(O) & D_{yy} f(O)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0\\ 0 & -8\end{vmatrix} = 16$$

Ricordiamo che:
- $D_x^2 f(O) = -2 < 0$
- $Hf(O) > 0$

ci assicura che il punto $O(0, 0)$ sia un punto di massimo relativo per f.