Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Ottava lezione - 19/04/2018

1. Esercizi

Esercizio 1. *Data*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto F(x, y) = xe^y + ye^x$$

e considerata l'equazione $F(x, y) = 0$*, verificare se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema delle funzioni implicite nel punto* $P(0, 0)$*.*
Successivamente, scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(0)$ *(con* f *funzione implicita) fino al secondo ordine.*

Soluzione:
Affinché sia applicabile il Teorema delle funzioni implicite a F nel punto P, è necessario verificare che:

- $F(P) = F(0, 0) = 0$;
- $D_yF(P) = D_yF(0, 0) \neq 0$ (o, equivalentemente, $D_xF(P) = D_xF(0, 0) \neq 0$)

Notiamo che entrambe le richieste sono verificate essendo, in particolare,

$$D_yF(x, y) = xe^y + e^x \implies D_yF(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Ciò ci assicura l'esistenza di un intorno U del punto $x_P = 0$, un intorno V del punto $y_P = 0$ e l'esistenza della funzione implicita

$$f : U \to V$$
$$x \mapsto f(x)$$

tali che

(1) $y_P = f(x_P)$ (in particolare, nel nostro caso, $0 = f(0)$) e $y = f(x)$ $\forall (x, y) \in U \times V$;
(2) essendo $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \implies f \in C^\infty(U; V)$ e vale la seguente caratterizzazione della derivata prima della funzione implicita f:

$$f'(x) = -\frac{D_xF(x, f(x))}{D_yF(x, f(x))} \quad \forall x \in U.$$

Quest'ultimo punto afferma, in particolare, che

$$f'(0) = -\frac{D_xF(0, f(0))}{D_yF(0, f(0))} = -1$$

essendo $D_xF(x, y) = e^y + y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tale informazione risulterà utile per rispondere alla seconda richiesta dell'esercizio; ricordiamo infatti che lo sviluppo di $f(x)$ in un intorno del punto $x = 0$ (come potrebbe, ad esempio, essere l'intorno U fornito dal Teorema delle funzioni implicite, oppure un suo sottoinsieme) troncato al secondo ordine, è dato da:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) \text{ per } x \to 0$$

Per concludere, non rimane altro che calcolare il valore di $f''(0)$. A tal fine, possiamo procedere in due modi:

- derivare $f'(x)$, la cui legge ci viene fornita nella tesi del Teorema delle funzioni implicite e valutare tale derivata nel punto $x = 0$;
- pensando a come è stata costruita $f'(x)$ all'interno della dimostrazione del teorema, possiamo costruirci $f''(x)$ allo stesso modo (seguiremo questo metodo).

Sia quindi

$$
\begin{aligned}
G : U &\to V \\
x &\mapsto G(x) = F(x, f(x))
\end{aligned}
$$

Essendo $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ e $f \in C^{\infty}(U; V)$, ne discende che $G \in C^{\infty}(U; V)$. Ha allora senso definire in U

$$G'(x) = \frac{d}{d_x} G(x) = \frac{d}{d_x} F(x, f(x)) = D_x F(x, f(x)) + D_y F(x, f(x)) f'(x)$$

dove, abbiamo applicato la regola di derivazione delle funzioni composte in due variabili.
Ponendo $G'(x) = 0$, si ottiene, a conclusione della dimostrazione del teorema, la scrittura

$$f'(x) = -\frac{D_x F(x, f(x))}{D_y F(x, f(x))} \quad \forall x \in U.$$

Derivando nuovamente la funzione G in U e ponendo $G''(x) = 0$ in U, è quindi probabile poter ottenere quanto desiderato:

$$
\begin{aligned}
G''(x) &= \frac{d}{d_x} G'(x) = \frac{d}{d_x} \left(D_x F(x, f(x)) + D_y F(x, f(x)) f'(x) \right) \\
&= D_x^2 F(x, f(x)) + D_{xy}^2 F(x, f(x)) f'(x) + D_{yx}^2 F(x, f(x)) f'(x) + D_y^2 F(x, f(x)) [f'(x)]^2 \\
&\quad + D_y F(x, f(x)) f''(x) \\
&= D_x^2 F(x, f(x)) + 2 D_{xy}^2 F(x, f(x)) f'(x) + D_y^2 F(x, f(x)) [f'(x)]^2 + D_y F(x, f(x)) f''(x)
\end{aligned}
$$

dove, grazie al Teorema di Schwarz, abbiamo ottenuto l'uguaglianza delle due derivate miste.

Osservazione 1. *Per come sono stati definiti gli intorni U e V e la mappa $G(x)$, risulta evidente che essa sia costantemente nulla ($G(x) = 0$) in tutto l'intorno U. In tutto $U \times V$ infatti, per la prima parte della tesi del Teorema delle funzioni implicite, abbiamo che $y = f(x)$ o, equivalentemente che*

$$G(x) = F(x, f(x)) = F(x, y) = 0.$$

Ne consegue che ogni derivata di G sia nulla in U, in base alla sua regolarità (essendo $G \in C^{\infty}(U; V)$ ciò è vero per ogni sua derivata).

Possiamo quindi affermare con certezza che $G''(x) = 0$ in U, cioè che:

$$
\begin{aligned}
G''(x) = 0 &\iff D_x^2 F(x, f(x)) + 2 D_{xy}^2 F(x, f(x)) f'(x) + D_y^2 F(x, f(x)) [f'(x)]^2 + D_y F(x, f(x)) f''(x) = 0 \\
&\iff f''(x) = -\frac{D_x^2 F(x, f(x)) + 2 D_{xy}^2 F(x, f(x)) f'(x) + D_y^2 F(x, f(x)) [f'(x)]^2}{D_y F(x, f(x))}
\end{aligned}
$$

Per calcolare quindi il valore di $f''(0)$ sarà sufficiente calcolarci le derivate seconde di F in $(x, y) = (0, 0)$.
Abbiamo quindi che:

$$
\begin{cases}
D_x^2 F(x, y) = y e^x \\
D_{xy}^2 F(x, y) = D_{yx}^2 F(x, y) = e^x + e^y \\
D_y^2 F(x, y) = x e^y
\end{cases}
\implies
\begin{cases}
D_x^2 F(0, 0) = 0 \\
D_{xy}^2 F(0, 0) = D_{yx}^2 F(0, 0) = 2 \\
D_y^2 F(0, 0) = 0
\end{cases}
$$

e, di conseguenza, che

$$f'(0) = -\frac{D_x^2 F(0, f(0)) + 2 D_{xy}^2 F(0, f(0)) f'(x) + D_y^2 F(0, f(0)) [f'(0)]^2}{D_y F(0, f(0))} = 4$$

Abbiamo così ottenuto lo sviluppo di $f(x)$ in U, intorno del punto $x = 0$, troncato al secondo ordine

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + o(x^2) = -x + 2x^2 + o(x^2) \text{ per } x \to 0$$