Università degli Studi di Trento

# CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
# DIPARTIMENTO DI FISICA
# ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

## Prima lezione - 08/03/2018

### 1. Richiami teorici

**Definizione 1.** *Sia $X$ un insieme non vuoto. Definiamo la funzione*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

*una metrica (o distanza) su $X$ se essa verifica le seguenti proprietá:*

(i) $d(x, y) \geq 0;\ d(x, y) = 0 \iff x = y\ \forall\ x, y \in X;$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall\ x, y \in X;$
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall\ x, y, z \in X.$

**Osservazione 1.** *Qualora nella definizione precedente non fosse verificata la (i), ma fosse verificata la seguente proprietá:*

(i') $d(x, y) \geq 0;\ x = y \implies d(x, y) = 0\ \forall\ x, y \in X$ *ma* $\exists\ \overline{x}, \overline{y} \in X$ *tali che* $\overline{x} \neq \overline{y}$ *e* $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$

*diremo che $d$ è una pseudo metrica su $X$.*

**Definizione 2.** *Sia $X$ insieme non vuoto e $d$ una metrica su $X$. Definiamo la coppia $(X, d)$ spazio metrico.*

**Definizione 3.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $E \subset X$. Diremo che $E$ è limitato in $X$ rispetto alla metrica $d$ se $\exists\ x \in X$ e $\exists\ r > 0$ tali che*

$$E \subset D(x, r) = \{y \in X\ t.c.\ d(x, y) < r\}$$

*o, equivalentemente, se il diametro di $E$*

$$diam(E) := \sup\{d(x, y)\ t.c.\ x, y \in E\} < \infty.$$

**Definizione 4.** *Siano $d$ e $d'$ due metriche su uno stesso insieme non vuoto $X$. Diremo che $d$ è equivalente a $d'$ se $\exists\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che*

$$c_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq c_2 d(x, y)\ \forall\ x, y \in X.$$

### 2. Esercizi

**Esercizio 1.** *Dimostrare che la seguente funzione è una metrica su $\mathbb{R}^N$:*

$$\begin{aligned} d_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

Soluzione:

(i) Banalmente, dalle proprietá del valore assoluto, risulta che $d_1(x, y) \geq 0\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N$.
Risulta inoltre che:

$$d_1(x, y) = 0 \iff |x_i - y_i| = 0\ \ \forall\ i \in \{1, ..., N\} \iff x_i = y_i\ \ \forall\ i \in \{1, ..., N\} \iff x = y\ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Per le proprietá del valore assoluto vale inoltre che:

$$d_1(x, y) = d_1(y, x)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) Dimostriamo infine, per induzione su $N \in \mathbb{N}$, la disuguaglianza triangolare:

- Base induttiva: caso $N = 1$.
  Osserviamo che in questo caso $d_1$ coincide con la metrica euclidea in $\mathbb{R}$ la quale verifica banalmente la disuguaglianza triangolare.
- Ipotesi induttiva: supponiamo che la disuguaglianza sia verificata fino al caso $(N-1)$-esimo, ovvero che, posta

$$\begin{aligned} d_1^* : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{i=1}^{N-1} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

  essa sia una metrica su $\mathbb{R}^{N-1}$.
- Mostriamo a questo punto che $d_1$ è una metrica su $\mathbb{R}^N$. Fissiamo, a questo proposito,

$$x = (x_1, ..., x_N),\ y = (y_1, ..., y_N),\ z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{R}^N$$

  e verifichiamo che

$$d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y).$$

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{N-1} |x_i - y_i| + |x_N - y_N| = d_1^*(x, y) + |x_N - z_N + z_N - y_N| \\ &\leq d_1^*(x, z) + d_1^*(z, y) + |x_N - z_N| + |z_N - y_N| \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} |x_i - z_i| + |x_N - z_N| + \sum_{i=1}^{N-1} |z_i - y_i| + |z_N - y_N| \\ &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{N} |z_i - y_i| = d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** *Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $d$ una generica metrica su $X$. Mostrare che la coppia $(X, \overline{d})$ è uno spazio metrico limitato, dove*

$$\begin{aligned} \overline{d} : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \end{aligned}$$

Soluzione:

1) Dimostriamo per prima cosa che $\overline{d}$ è una metrica in $X$:
   (i) Banalmente, dalle proprietá di $d$, risulta che $\overline{d}(x, y) \geq 0\ \forall\ x, y \in X$ e che

$$\overline{d}(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall\ x, y \in X.$$

   (ii) Nuovamente la simmetria di $d$ implica che

$$\overline{d}(x, y) = \overline{d}(y, x)\ \forall\ x, y \in X.$$

   (iii) Verifichiamo infine che

$$\overline{d}(x, y) \leq \overline{d}(x, z) + \overline{d}(z, y)\ \forall\ x, y, z \in X.$$

   Proponiamo, a tal fine, due metodi
   (Metodo 1) Definiamo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t}{1 + t} \end{aligned}$$

   Si può facilmente osservare che $f$ è continua e strettamente crescente in tutto il suo dominio di definizione, essendo $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}_0^+$.

Fissati quindi $x, y, z \in X$ e osservando che, per la disuguaglianza triangolare verificata da $d$ risulta che $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, si ha allora, per la monotonia di $f$, che

$$\begin{aligned}\overline{d}(x,y) = f(d(x,y)) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{(d(x,z)+d(z,y))}{1+(d(x,z)+d(z,y))} = f(d(x,z)+d(z,y)) \\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = f(d(x,z)) + f(d(z,y)) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).\end{aligned}$$

(Metodo 2) Fissiamo $x, y, z \in X$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned}\overline{d}(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(x,y)+1-1}{1+d(x,y)} \\ &= \frac{1+d(x,y)}{1+d(x,y)} - \frac{1}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).\end{aligned}$$

Discende, da quanto appena dimostrato, che $(X, \overline{d})$ è uno spazio metrico.

2) La limitatezza dello spazio $(X, \overline{d})$ è data dal fatto che

$$|\overline{d}(x,y)| = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1 \ \forall\ x, y \in X.$$

Otteniamo cosí che

$$diam(X, \overline{d}) = \sup\{\overline{d}(x,y),\ x, y \in X\} \leq 1.$$

(L'uguaglianza $diam(X) = 1$ vale nel caso in cui $(X, d)$ sia uno spazio metrico illimitato).

**Esercizio 3.** *Verificare se la funzione*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \min_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

*è una metrica oppure una pseudo metrica su* $\mathbb{R}^N$.

Soluzione:

(i) Banalmente, per come è stata definita $d$, risulta che $d(x,y) \geq 0 \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N$.
Considerando tuttavia

$$x = (1, 0, ..., 0),\ y = (0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N$$

otteniamo che $d(x,y) = 0$ pur essendo $x \neq y$. Ne discende che $d$ potrá al piú essere una pseudo metrica su $\mathbb{R}^N$, qualora essa verifichi la proprietá simmetrica e la disuguaglianza triangolare.

(ii) Dalla simmetria della metrica euclidea in $\mathbb{R}$ discende che

$$d(x,y) = d(y,x) \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) Per concludere, osserviamo infine che, scelti ad esempio

$$x = (1, ..., 1),\ y = (0, ..., 0),\ z = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N$$

risulta che

$$d(x,y) = 1 > d(x,z) + d(z,y) = 0.$$

Di conseguenza, la funzione $d$ non è né una metrica, né una pseudo metrica su $\mathbb{R}^N$.

**Esercizio 4.** *Verificare che la coppia* $(\mathbb{R}^N, d)$ *è uno spazio metrico, dove*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \min\{1, d_2(x, y)\} \end{aligned}$$

*con* $d_2$ *metrica euclidea in* $\mathbb{R}^N$*.*
*Verificare successivamente se la metrica* $d$ *è equivalente alla metrica* $d_2$*.*

Soluzione:

(i) Banalmente, per le proprietá di $d_2$, risulta che $d(x, y) \geq 0 \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N$.
Osserviamo poi che

$$d(x, y) = 0 \iff d(x, y) = d_2(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Risulta poi che

$$d(y, x) = \min\{1, d_2(y, x)\} = \min\{1, d_2(x, y)\} = d(x, y) \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) Per quanto riguarda la dimostrazione della disuguaglianza triangolare, fissiamo $x, y, z \in \mathbb{R}^N$, distinguendo i seguenti due casi:

Caso 1) $d(x, z)+d(z, y) \geq 1$. In questo caso non c'è nulla da dimostrare essendo $d(x, y) \leq 1 \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N$;

Caso 2) $d(x, z) + d(z, y) < 1$. In questo secondo caso osserviamo banalmente che

$$d(x, z) + d(z, y) < 1 \implies \begin{cases} d(x, z) < 1 \\ d(z, y) < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} d(x, z) = d_2(x, z) < 1 \\ d(z, y) = d_2(z, y) < 1 \end{cases}$$

Da cui, applicando la disuguaglianza triangolare a $d_2$, otteniamo che:

$$d(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

Per concludere l'esercizio ricordiamo che $d$ è equivalente a $d_2$ se $\exists \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$c_1 d(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d(x, y) \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Considerando $c_1 = 1$ otteniamo banalmente, dalla definizione di $d$, che

$$d(x, y) \leq d_2(x, y) \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Tuttavia non puó esistere $c_2 \in \mathbb{R}^+$ tale che $d_2(x, y) \leq c_2 d(x, y) \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N$.
Supponiamo infatti, per assurdo, che $\exists \ c_2 \in \mathbb{R}^+$ tale che $d_2(x, y) \leq c_2 d(x, y) \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N$ e scegliamo

$$x = (c_2 + 1, 0, ..., 0), \ y = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N.$$

Osserviamo che

$$d_2(x, y) = c_2 + 1 > c_2 \geq c_2 d(x, y)$$

essendo, per costruzione, $d(x, y) \leq 1 \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^N$, il che è assurdo.

**Esercizio 5.** *Sia* $(X, d)$ *un generico spazio metrico. Dimostrare che* $d$ *verifica la disuguaglianza quadrangolare*

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w) \ \forall \ x, y, z, w \in X.$$

Soluzione:

Fissiamo $x, y, z, w \in X$ e supponiamo, senza perdita di generalitá che $d(x, y) \geq d(z, w)$.
Applicando la disuguaglianza triangolare di $d$ a $x, y \in X$ otteniamo

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza triangolare di $d$ a $z, y \in X$ otteniamo

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y).$$

Applicando, infine, la proprietá simmetrica di $d$ a $w, y \in X$ abbiamo che

$$d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(w, y) = d(x, z) + d(y, w)$$

il che è proprio ció che volevamo dimostrare.