Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Quarta lezione - 22/03/2018

1. Richiami teorici

1.1. **Spazi Topologici-seconda parte.**

Definizione 1. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ un sottoinsieme di X. In Y è indotta da (X,τ) una naturale topologia di sottospazio τ_Y, definita topologia di sottospazio o topologia indotta e definita come segue:*

(i) *$A \subset Y$ lo definiremo aperto in (Y,τ_Y) se $\exists\ B \in (X,\tau)$ (aperto in X), tale che*
$$A = B \cap Y;$$
(ii) *$C \subset Y$ lo definiremo chiuso in (Y,τ_Y) se $Y \setminus C$ è aperto in (Y,τ_Y). Per la precedente proprietà, ciò è vero se $\exists\ D \in (X,\tau)$ tale che*
$$Y \setminus C = D \cap Y.$$

Osservazione 1. *Applicando De Morgan, possiamo riscrivere la (ii) nel seguente modo piú operativo:*

(ii') *$C \subset Y$ lo definiremo chiuso in (Y,τ_Y) se $\exists\ E$ chiuso in (X,τ) tale che*
$$C = E \cap Y.$$

1.2. **Continuità.**

La definizione di continuità più generica in assoluto vive nel contesto degli spazi topologici ed è la seguente:

Definizione 2. *Siano (X,τ_X) e (Y,τ_Y) spazi topologici e sia*
$$f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$$
Diremo che f è continua in (X,τ_X) se
$$\forall A \in (Y,\tau_Y) \implies f^{-1}(A) \in (X,\tau_X)$$
ovvero se controimmagine, tramite f, di aperti di (Y,τ_Y) è un aperto di (X,τ_X).

Osservazione 2. *Nel contesto di spazi metrici, la precedente definizione puó essere riletta nel seguente modo:*
Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) spazi metrici e sia
$$f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$$
Diremo che f è continua in (X,d_X) se $\forall\ x_0 \in X$ abbiamo che
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \forall\ x \in X \setminus \{x_0\} \text{ tale che } d_X(x,x_0) < \delta \implies d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

Osservazione 3. *Nel caso particolare in cui $X = \mathbb{R}^N$ e $Y = \mathbb{R}$, la precedente diviene (considerando gli spazi dotati delle distanze euclidee):*
$$f : (\mathbb{R}^N, d_2) \to (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$$
è continua in $\mathbb{R}^N$ se $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^N$ risulta che
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \forall\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\} \text{ tale che } \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. Esercizi

Esercizio 1. *Sia* $Y = (-5, 5) \subset \mathbb{R}$ *(consideriamo qui* $\mathbb{R}$ *come lo spazio topologico dotato della topologia indotta dalla metrica euclidea) e sia* $A = [1, 5) \subset Y \subset \mathbb{R}$.
Dimostrare che A *è chiuso in* (Y, τ_Y)*, dove* τ_Y *è la topologia indotta da* $\mathbb{R}$ *su* Y.

Soluzione:
Per definizione di topologia indotta, A è chiuso in (Y, τ_Y) se $\exists\, B$ chiuso in $\mathbb{R}$ tale che
$$A = B \cap Y.$$
Per come sono stati definiti A e Y è sufficiente considerare $B = [1, 5 + \alpha]$ con $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ (chiuso in $\mathbb{R}$). Scegliendo ad esempio $\alpha = 0$, abbiamo che
$$B \cap Y = [1, 5] \cap (-5, 5) = [1, 5) = A.$$
Ne discende che A è chiuso in (Y, τ_Y).

Esercizio 2. *Mostrare che la funzione* f*, definita da*
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{y \log(1 + x^2 + 4y^2)}{2x^2 + 8y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$
è di classe C^0 *in* $\mathbb{R}^2$ *(cioé è continua in* $\mathbb{R}^2$*).*

Soluzione:
Osserviamo per prima cosa che f è continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ essendo composizione di funzioni continue.
Resta quindi da esaminare se f è continua nell'origine. Ciò è vero se
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$
Per verificarlo applichiamo la definizione di limite
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tali che $d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (0, 0)) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x, y), f(0, 0)) < \varepsilon$.
A tal fine, fissiamo $\varepsilon > 0$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Osserviamo subito che
$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x, y), f(0, 0)) = d_{\mathbb{R}}(f(x, y), 0) &= \left| \frac{y \log(1 + x^2 + 4y^2)}{2x^2 + 8y^2} - 0 \right| \\ &= \left| \frac{y \log(1 + x^2 + 4y^2)}{2x^2 + 8y^2} \right| = \frac{|y| \log(1 + x^2 + 4y^2)}{2(x^2 + 4y^2)} \approx \frac{|y|}{2}. \end{aligned}$$
dove l'ultima stima segue dalle considerazioni sul noto limite notevole <u>in $\mathbb{R}$</u>
$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1.$$
Osservando poi che
$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (0, 0)) < \delta$$
otteniamo dalla precedente stima
$$d_{\mathbb{R}}(f(x, y), f(0, 0)) \approx \frac{|y|}{2} < \frac{\delta}{2}.$$
Scelto quindi
$$\delta = \delta(\varepsilon) = 2\varepsilon - \alpha(\varepsilon)$$
con $\alpha(\varepsilon) \in (0, 2\varepsilon)$, affinche $0 < \delta < 2\varepsilon$ (il 2 che moltiplica ε è utile solo al fine dei conti), otteniamo
$$d_{\mathbb{R}}(f(x, y), f(0, 0)) < \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon - \alpha(\varepsilon)}{2} = \varepsilon - \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} < \varepsilon.$$
Ciò dimostra la correttezza nel calcolo del limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$
Ne consegue che f è continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. *Mostrare che la funzione f, definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non è continua in $\mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:

Essendo sicuramente f continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, essendo composizione di funzioni continue, dovremmo dimostrare che f non è continua nell'origine.
Ricordiamo che per dimostrare che una funzione non è continua in un punto è sufficiente mostrare che lungo due differenti direzioni il limite in quel punto si comporta diversamente.
Vediamo, per prima cosa, come si comporta il limite lungo le direzioni degli assi coordinati (continuità separata):

(asse x) essendo i punti dell'asse x (in un intorno dell'origine) del tipo $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0 (= f(0,0));$$

(asse y) nuovamente, essendo i punti dell'asse y (in un intorno dell'origine) del tipo $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcoliamo

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 0 (= f(0,0)).$$

Ciò è sufficiente a dimostrare non solo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0 = f(0,0)$$

ma anche che tale limite non esiste.
Ne consegue che f non è continua nell'origine e di conseguenza non è continua in tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4. *Sfruttare la non continuità di f in $\mathbb{R}^2$, dove f è definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & se\ xy = 0 \\ 2 & se\ xy \neq 0 \end{cases}$$

per dimostare che la continuità separata non implica, in generale, la continuità.

SOLUZIONE:

La funzione, per come è stata definita, è chiaramente continua negli insiemi

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } xy = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } y = 0\} \text{ e}$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } xy \neq 0\}.$$

Tuttavia, è evidente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2 \neq 1 = f(0,0)$$

lungo tutte le rette del tipo $y = mx$ con $m \neq 0$, mentre lungo le direzioni degli assi, abbiamo che:

(asse x)

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 = f(0,0);$$

(asse y)

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 1 = f(0,0).$$

Ciò è sufficiente a dimostrare che la continuità separata non implica la continuità.

Esercizio 5. *Mostrare che la funzione f, definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

SOLUZIONE:
Osserviamo per prima cosa che f è continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ essendo composizione di funzioni continue.
Resta quindi da esaminare se f è continua nell'origine. Ciò è vero se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

(Metodo 1) Per verificarlo applichiamo la definizione di limite

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \text{ tali che } d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x,y), f(0,0)) < \varepsilon.$$

A tal fine, fissiamo $\varepsilon > 0$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Osserviamo subito che

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(f(x,y), f(0,0)) = d_{\mathbb{R}}(f(x,y), 0) &= \left|\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4} - 0\right| \\ &= \left|\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4}\right| = \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4} < \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2} = (x^2+y^2). \end{aligned}$$

Osservando che, in un intorno dell'origine,

$$x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2} = d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) < \delta$$

otteniamo dalla precedente stima

$$d_{\mathbb{R}}(f(x,y), f(0,0)) < (x^2+y^2) < \delta.$$

Scelto quindi

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon - \alpha(\varepsilon)$$

con $\alpha(\varepsilon) \in (0,\varepsilon)$, affinche $0 < \delta < \varepsilon$, otteniamo

$$d_{\mathbb{R}}(f(x,y), f(0,0)) < (x^2+y^2) < \delta = \varepsilon - \alpha(\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ciò dimostra la correttezza nel calcolo del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Ne consegue che f è continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$.

(Metodo 2) Qualora la verifica del limite risulti troppo complicata, si puó procedere al calcolo del limite in coordinate polari. Ciò semplifica notevolmente i calcoli, divenendo sostanzialmente un limite in $\mathbb{R}$. Tuttavia, anche seguendo questo metodo, sarà necessario dimostrare l'uniformitá rispetto a Θ che, in alcuni casi, puó essere piú complicato dalla verifica stessa del limite in coordinate cartesiane.
Passando quindi alle coordinate polari, secondo la biiezione

$$\begin{cases} x = \rho\cos\Theta \\ y = \rho\sin\Theta \end{cases}$$

possiamo riscrivere il nostro limite come

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0.0)} f(x,y) &= \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\Theta, \rho\sin\Theta) \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\Theta(\rho^2\cos^2\Theta + \rho^2\sin^2\Theta)}{\rho^2\cos^2\Theta + \rho^4\sin^4\Theta} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\Theta}{\rho^2(\cos^2\Theta + \rho^2\sin^4\Theta)} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\Theta}{\cos^2\Theta + \rho^2\sin^4\Theta} = 0. \end{aligned}$$

Per concludere, verifichiamo l'uniformitá rispetto a $\Theta \in [0, 2\pi)$.
Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}}(f(\rho\cos\Theta, \rho\sin\Theta), f(0,0)) &= \left|\frac{\rho^2\cos^2\Theta(\rho^2\cos^2\Theta + \rho^2\sin^2\Theta)}{\rho^2\cos^2\Theta + \rho^4\sin^4\Theta} - 0\right| \\
&= \left|\frac{\rho^2\cos^2\Theta(\rho^2\cos^2\Theta + \rho^2\sin^2\Theta)}{\rho^2\cos^2\Theta + \rho^4\sin^4\Theta}\right| \\
&= \frac{\rho^4\cos^2\Theta}{\rho^2(\cos^2\Theta + \rho^2\sin^4\Theta)} \\
&\leq \frac{\rho^2\cos^2\Theta}{\cos^2\Theta} = \rho^2 < \delta^2.
\end{aligned}$$

Posto quindi $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon - \alpha(\varepsilon)}$ con $\alpha(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ (affinché $\delta \in (0, \sqrt{\varepsilon})$), abbiamo

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}}(f(x,y), (0,0)) &= d_{\mathbb{R}}(f(\rho\cos\Theta, \rho\sin\Theta), f(0,0)) \\
&\leq \rho^2 < \delta^2 = \varepsilon - \alpha(\varepsilon) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ne consegue che f è continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$.