Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Quinta lezione - 04/04/2018

1. Richiami teorici

1.1. **Derivabilità in $\mathbb{R}^N$.** Il nostro obiettivo è quello di generalizzare il concetto di derivazione da funzioni di una variabile reale a funzioni definite in tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$. Una prima estensione naturale di tale concetto è quella di derivazione parziale.

Definizione 1. *Sia $P(x_1^0, ..., x_N^0) \in A$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia*

$$f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, ..., x_N) \mapsto f(x_1, ..., x_N)$$

Diremo che f è derivabile parzialmente in P rispetto alla variabile x_j, con $j \in \{1, .., N\}$, se esiste in $\mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, x_j^0 + h, x_{j+1}^0, ..., x_N^0) - f(x_1^0, ..., x_N^0)}{h} := D_{x_j} f(P).$$

Definiamo quindi f derivabile in $P \in A$ se esistono tutte le derivate parziali di f in P e definiamo gradiente di f in P il vettore

$$\nabla f(P) := (D_{x_1} f(P), ..., D_{x_N} f(P))$$

Osservazione 1. *Rileggiamo la definizione precedente nel contesto di $\mathbb{R}^2$, dove andremo a svolgere i prossimi esercizi: siano A aperto di $\mathbb{R}^2$ e*

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Diremo che f è derivabile in $P(x_0, y_0) \in A$ se esistono $D_x f(P)$ e $D_y f(P)$ derivate parziali di f in P, ovvero se il valore dei seguenti limiti esiste (finito) in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} := D_x f(P)$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} := D_y f(P)$$

Definiremo gradiente di f in P il vettore

$$\nabla f(P) =: (D_x f(P), D_y f(P)).$$

Osservazione 2. *Come vedremo nel corso dell'esercizio 2, in generale il concetto di derivabilità (precedentemente definito) di f in un punto $P \in A$ aperto di $\mathbb{R}^2$, non implica necessariamente la continuità della funzione in quel punto. Non è stato quindi correttamente generalizzato il concetto di derivabilità unidimensionale che assicurava che ogni funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $P \in A$ era anche continua in P.*

Definizione 2. *Sia A aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia*

$$f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, ..., x_N) \mapsto f(x_1, ..., x_N)$$

Diremo che f è derivabile in A se lo è in ogni punto $P \in A$.

Osservazione 3. *Osserviamo che ciascuna delle derivate parziali di f in $P \in A$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$, è un rapporto incrementale analogo a quello definito nel caso di funzioni di variabile reale; considerate fissate $N - 1$ variabili, ad eccezione di quella interessata dalla derivazione parziale, studieremo la variazione di f lungo la direzione parallela all'N-esimo asse coordinato.*

Definizione 3. *Siano $P(x_1^0, ..., x_N^0) \in A$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$, $v \in \mathbb{R}^N$ versore ($\|v\| = \sqrt{v_1^2 + ... + v_N^2} = 1$) e sia*

$$f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, ..., x_N) \mapsto f(x_1, ..., x_N)$$

Diremo che f è derivabile in P lungo la direzione v se esiste in $\mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P + tv) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + tv_1, ..., x_N^0 + tv_N) - f(x_1^0, ..., x_N^0)}{t} := D_v f(P).$$

Se il valore di tale limite esiste ed è finito, definiamo derivata direzionale di f in P lungo la direzione v $D_v f(P)$.

Osservazione 4. *Osserviamo i seguenti fatti interessanti:*

(1) *nel caso in cui il versore v, della precedente definizione, coincidesse con $e_j(0, , , 0, 1, 0, , , 0)$ (versore canonico dell'asse x_j), la derivata direzionale $D_v f(P)$ non sarebbe altro che la derivata parziale $D_{x_j} f(P)$ $\forall P \in A$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$;*
(2) *il fatto che nella precedente definizione si lavori con un versore e non con un generico vettore, risiede nel fatto che la direzione espressa da un generico vettore w, lungo la quale f potrebbe muoversi, è la stessa di quella espressa dal versore associato a w, cioè $v := \frac{w}{\|w\|}$;*
(3) *come accadeva nella definizione di derivata parziale il limite nella precedente definizione è in una sola variabile $t \in \mathbb{R}$. Nel corso dell'esercizio 2 vedremo che, anche se f ammette derivata direzionale in P lungo ogni direzione v, non è detto che f sia continua in P. Ciò è dovuto al fatto che, nell'intorno del punto P stiamo esaminando la variazione di f solamente lungo direzioni rettilinee e non lungo <u>ogni possibile direzione</u>. Nuovamente non siamo quindi riusciti a generalizzare il concetto di derivata del caso reale;*
(3) *risultano a questo punto evidenti le seguenti relazioni:*
   (a) *esistenza delle derivate parziali $\Longrightarrow$ continuità separata (il viceversa è falso);*
   (b) *esistenza delle derivate direzionali lungo ogni direzione $\Longrightarrow$ continuità lungo una qualunque direzione rettilinea (il viceversa è falso).*

Il concetto che finalmente riuscirà a generalizzare quello di derivata nel caso N-dimensionale e che quindi ci assicura la continuità in un punto $P \in A$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$, è il concetto di differenziabilità, che nel caso unidimensionale vedremo coinciderà proprio con il classico concetto di derivabilità (fino a questo momento stavamo tentando di generalizzare, in un certo senso, il concetto sbagliato).

1.2. **Differenziabilità in $\mathbb{R}^N$.**

Definizione 4. *Sia $P(x_1^0, ..., x_N^0) \in A$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia*

$$f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, ..., x_N) \mapsto f(x_1, ..., x_N)$$

Diremo che f è differenziabile in P se, fissato un incremento <u>N-dimensionale</u> $h = (h_1, ..., h_N) \in \mathbb{R}^N$, è possibile scrivere la variazione $\Delta f(P) = f(P + h) - f(P) = f(x_1^0 + h_1, ..., x_N^0 + h_N) - f(x_1^0, ..., x_N^0)$ come:

$$\Delta f(P) = A(h) + \varepsilon(h)$$

dove

$$A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(h_1, ..., h_N) \mapsto A(h_1, ..., h_N)$$

è una mappa <u>lineare</u> e il resto $\varepsilon(h) = \Delta f(P) - A(h)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\|h\|$ per $h \to 0$, cioè

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0.$$

L'idea è quindi quella di cercare di approssimare la funzione f con una mappa <u>lineare</u> in un intorno del punto P.

Definizione 5. *Sia A aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia*

$$f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, ..., x_N) \mapsto f(x_1, ..., x_N)$$

Diremo che f è differenziabile in A se lo è in ogni punto $P \in A$.

2. Esercizi

Esercizio 1. *Stabilire se la funzione f, definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

Osserviamo per prima cosa che f è continua in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ essendo composizione di funzioni continue.
Resta quindi da esaminare se f è continua nell'origine. Ció è vero se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Vediamo, per prima cosa, come si comporta il limite lungo le direzioni degli assi coordinati (continuitá separata):

(asse x) essendo i punti dell'asse x (in un intorno dell'origine) del tipo $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0 (= f(0,0));$$

(asse y) nuovamente, essendo i punti dell'asse y (in un intorno dell'origine) del tipo $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcoliamo

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 (= f(0,0)).$$

Proviamo ora a verificare cosa succede lungo tutte le rette del tipo $y = mx$ (fascio di rette passante per l'origine):

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

indipendentemente dal valore di m.
Viene così da pensare che f sia continua anche nell'origine. Osserviamo, attraverso il prossimo esempio, che ciò non è tuttavia vero:
consideriamo come cammino una parabola di vertice nell'origine come, ad esempio, $y = x^2$.
Abbiamo in questo caso che

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Ciò ci permette di affermare due cose:

1. La funzione f non è continua in $(0,0)$;
2. In generale la continuità lungo ogni retta passante per il punto non garantisce la continua di f nel punto.

Esercizio 2. *Dimostrare l'esistenza di tutte le derivate direzionali di f nell'origine, con f definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} x e^{\frac{x}{y}} & se\ y \neq 0 \\ 0 & se\ y = 0 \end{cases}$$

e verificare che, nonostante la loro esistenza, f non è continua nell'origine.

Soluzione:

Andiamo a calcolarci una generica derivata direzionale di f distinguendo, per come è stata definita f, i seguenti due casi:

1. Fissiamo un versore $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ e $v_2 \neq 0$ (escludendo quindi la direzione dell'asse x) e andiamo a calcolarci

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1 e^{\frac{tv_1}{tv_2}} - 0}{t} = v_1 e^{\frac{v_1}{v_2}} \in \mathbb{R}.$$

(2) Ricordando infine che la derivata direzionale lungo l'asse x di f corrisponde alla derivata parziale di f rispetto la variabile x valutata nel punto, otteniamo

$$D_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Possiamo quindi affermare con certezza che f ammette derivata direzionale nell'origine lungo ogni direzione.
Per concludere l'esercizio dimostriamo che lungo la curva regolare $y = x^3$, passante per l'origine, il limite nell'origine non assume il valore desiderato ($f(0,0) = 0$).
Abbiamo infatti che

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^3) = \lim_{x\to 0} x e^{\frac{x}{x^3}} = +\infty.$$

Ciò ci permette di affermare due cose:

(1) La funzione f non è continua in $(0,0)$;
(2) In generale la derivabilità di f in un punto lungo ogni direzione v non garantisce la continua di f nel punto.

Esercizio 3. *Dimostrare, attraverso la definizione, che la funzione f definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto |xy|$$

è differenziabile nell'origine.

SOLUZIONE:

Per dimostrare la differenziabilità di f in un punto verifichiamo le seguenti cose:

(1) L'esistenza delle derivate parziali di f nel punto;
(2) Che il resto, della formula del differenziale nel punto, sia un infinitesimo di ordine superiore alla norma dell'incremento, quando l'incremento tende a 0.

Banalmente si vede che

$$D_x f(x,y) = |y| sgn(x) = |y| \frac{x}{|x|};\ D_y f(x,y) = |x| sgn(y) = |x| \frac{y}{|y|}$$

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ne consegue che

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Applicando la definizione di differenziale in $(0,0)$ e ricordando che, per i teoremi noti, possiamo rileggere $A(h) = (\nabla f(0,0), (h,k))$ (prodotto scalare tra il vettore gradiente nel punto ed il vettore dell'incremento), abbiamo

$$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = (\nabla f(0,0), (h,k)) + \varepsilon(h,k).$$

Verifichiamo quindi che il resto

$$\varepsilon(h,k) = f(0+h,0+k) - f(0,0) - (\nabla f(0,0),(h,k)) = f(h,k) = |hk| = o(\|(h,k)\|).$$

Osservando che

$$0 \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

essendo

$$|h| = \sqrt{h^2} \leq \sqrt{h^2+k^2};\ |k| = \sqrt{k^2} \leq \sqrt{h^2+k^2}$$

arriviamo alla conclusione che f è differenziabile nell'origine.