Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Seconda lezione - 13/03/2018

1. Richiami teorici

Definizione 1. *Dato uno spazio metrico (X, d) definiamo successione un'applicazione*

$$f : A \subset \mathbb{N} \to (X, d)$$
$$n \mapsto f(n) := x_n$$

Indicheremo d'ora in avanti tale successione con la scrittura $(x_n)_{n\in A}$ o, semplicemente $(x_n)_n$ quando il contesto lo permetterá.

Definizione 2. *Dati (X, d) spazio metrico, $(x_n)_n$ successione in (X, d) e $\overline{x} \in X$, diremo che la successione $(x_n)_n$ converge a $\overline{x}$ e, formalmente, scriveremo*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq \overline{n}\quad d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon.$$

Definizione 3. *Dati (X, d) spazio metrico e $(x_n)_n$ successione in (X, d), definiamo tale successione di Cauchy in (X, d) se*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\ n, m \geq N\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Osservazione 1. *In $(X, d) = (\mathbb{R}^N, d)$ con d metrica indotta da una delle norme equivalenti in $\mathbb{R}^N$, ogni successione è di Cauchy $\iff$ è convergente.*
In generale ciò non è vero, ma vale solamente che ogni successione convergente in (X, d) spazio metrico è di Cauchy in tale spazio.

Definizione 4. *Sia (X, d) spazio metrico. Lo definiremo completo se ogni successione di Cauchy converge in tale spazio.*

2. Esercizi

Esercizio 1. *Considerato lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d_2)$ e chiamata $d = d_2|_{\mathbb{Q}}$, dove d_2 è la metrica indotta dalla funzione $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$, si dimostri che la successione $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, definita da $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, è di Cauchy in $(\mathbb{Q}, d)$ ma non può convergere a nessun elemento di tale spazio.*

Soluzione:

Osserviamo che la successione $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ definita da $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge, rispetto alla metrica d_2, ad $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$ numero di Nepero, per definizione di e stesso. Essendo convergente essa è anche di Cauchy in $(\mathbb{R}, d_2)$ ed essendo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, ne consegue che tale è di Cauchy in $(\mathbb{Q}, d)$.
Per concludere l'esercizio mostriamo che essa non può convergere ad alcun elemento di $(\mathbb{Q}, d)$.
Supponiamo per assurdo che $\exists\ \overline{x} \in \mathbb{Q}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

Per definizione di convergenza, ne discende che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \overline{x}) = 0.$$

Tuttavia, sapendo che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$$

abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \overline{x}\right) = |\mathrm{e}-\overline{x}| \neq 0 \ \forall\, \overline{x} \in \mathbb{Q}$$

ma ció è assurdo.

Osservazione 2. *Osserviamo che, nell'esercizio precedente, la non completezza dello spazio $(\mathbb{Q}, d)$ è dovuta al fatto che tale spazio non è chiuso in $(\mathbb{R}, d_2)$ (Ricordiamo infatti che $(\mathbb{Q}, d)$ è denso in $(\mathbb{R}, d_2)$).*
Più in generale, parlando di spazi metrici qualunque, vale il seguente risultato:

Teorema 1. *Sia (X, d) spazio metrico completo e sia $Y \subset X$. Chiamata d' la metrica indotta da d in Y ($d' = d|_Y$) vale che:*
(Y, d') è uno spazio metrico completo $\iff$ (Y, d') è chiuso rispetto alla topologia di sottospazio.

Esercizio 2. *Mostrare che la coppia $(\mathbb{R}, d)$, dove*

$$d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

è uno spazio metrico non completo.
(Suggerimento: mostrare che la successione $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, definita da $x_n = n$, è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$ ma non può convergere in tale spazio)

Soluzione:

Per prima cosa dimostriamo che la coppia $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

(i) Banalmente, dalle proprietá di $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$, abbiamo che $d(x, y) \geq 0 \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
Risulta inoltre che, dalla monotonia della funzione arctan,

$$d(x, y) = 0 \iff |\arctan(x) - \arctan(y)| = 0 \iff \arctan(x) = \arctan(y) \iff x = y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Per la simmetria di $|\cdot|$ risulta inoltre che

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan(y) - \arctan(x)| = d(y, x) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

(iii) Verifichiamo infine che

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Fissati $x, y, z \in \mathbb{R}$ abbiamo, per la monotonia della funzione arctan e per la disuguaglianza triangolare verificata dalla metrica indotta dalla funzione $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$, che:

$$\begin{aligned} d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| &= |\arctan(x) - \arctan(z) + \arctan(z) - \arctan(y)| \\ &\leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Ne consegue che la coppia $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
Dimostriamo ora che la successione $(n)_n$ non può convergere in $(\mathbb{R}, d)$.
Supponiamo per assurdo che $\exists\, \overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} n = \overline{x}.$$

Ne discende, applicando la definizione di convergenza in $(\mathbb{R}, d)$, che

$$\lim_{n\to\infty} d(n, \overline{x}) = 0.$$

Osserviamo tuttavia che

$$\lim_{n\to\infty} d(n, \overline{x}) = |\arctan(n) - \arctan(\overline{x})| = \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(\overline{x})\right| \neq 0$$

il che è assurdo.
Per concludere l'esercizio dimostriamo che la successione $(n)_n$ non è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$.
Proponiamo, a tal fine, due metodi:

(Metodo 1) Ricordiamo preliminarmente che

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ tali che } xy > 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e fissiamo $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n > m$. Abbiamo quindi che:

$$d(x_n, x_m) = d(n, m) = |\arctan(n) - \arctan(m)| = \left|\arctan\left(\frac{n-m}{1+nm}\right)\right|.$$

Fissato poi $N \in \mathbb{N}$ tale che $n > m \geq N$ osserviamo che:

$$\frac{n-m}{1+nm} < \frac{n}{nN} < \frac{1}{N}.$$

Ne consegue, per la monotonia della funzione arctan, che

$$d(x_n, x_m) < \left|\arctan\left(\frac{1}{N}\right)\right| = \arctan\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ricordando poi che, per N sufficientemente grande, vale che:

$$\frac{1}{N} \leq \tan\left(\frac{1}{N}\right) \implies \arctan\left(\frac{1}{N}\right) \leq \frac{1}{N}.$$

Ne discende che

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{N}$$

Posto quindi

$$N = N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon} \text{ tale che } N \in \mathbb{N}$$

abbiamo che

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{N} \leq \varepsilon \ \forall\ n, m \geq N$$

ovvero che la successione $(n)_n$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$.

(Metodo 2) Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n > m (\implies \arctan(n) > \arctan(m))$.
Sfruttando le proprietá della metrica indotta dalla funzione $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$, risulta che:

$$\begin{aligned}
d(n,m) &= |\arctan(n) - \arctan(m)| \\
&= \left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right| \\
&\leq \left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right| + \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right| \\
&< 2\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right|.
\end{aligned}$$

Scelto quindi

$$N = N(\varepsilon) \geq \tan\left(\frac{\pi - \varepsilon}{2}\right) \text{ tale che } N \in \mathbb{N}$$

ne consegue che

$$\begin{aligned}
d(n,m) &< 2\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right| \\
&\leq 2\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(N)\right| \\
&\leq 2\left|\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)\right)\right| \\
&= 2\left|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right| = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n, m \geq N$.
Ne consegue che la successione $(n)_n$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$.