Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Sesta lezione - 05/04/2018

1. Esercizi

Esercizio 1. *Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione f, definita da*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{y^2 - 2\sqrt{3} + 3} & , \ \textit{se } y \neq \sqrt{3} \\ 0 & , \ \textit{se } y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Stabilire successivamente se f ha punti di massimo e minimo relativi e assoluti

Soluzione:

Osserviamo subito che $\forall y \neq \sqrt{3}$ è possibile scrivere

$$f(x,y) = \frac{\log(1+x^2)}{(y-\sqrt{3})^2}.$$

Ciò suggerisce che, con un opportuno cambio di riferimento cartesiano, la scrittura del problema possa essere semplificata. Effettuando infatti una traslazione di vettore $v(0,\sqrt{3})$, andando cioè a definire due nuove variabili

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \sqrt{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x = x' \\ y = y' + \sqrt{3} \end{cases}$$

possiamo rileggere f come

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{y^2} & , \ \text{se } y \neq 0 \\ 0 & , \ \text{se } y = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo chiamato nuovamente $x' = x$ e $y' = y$, al fine di non appesantire la notazione.
Studiamo per prima cosa la continuità di f:
Definito $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y \neq 0\}$, osserviamo che f è continua in A essendo composizione di funzioni continue.
Rimane dunque da esaminare cosa succede lungo l'asse x.
Osservando che per $x = 0$ (con $y \neq 0$) il numeratore di f si annulla, tratteremo il case dell'origine a parte.
Fissiamo $P(x,0)$ con $x \neq 0$ e calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to P,\ y\neq 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{y^2} = +\infty.$$

Ciò è condizione sufficiente ad affermare che f non è continua nei punti dell'asse x (ad eccezione dell'origine che esamineremo a breve) e, per i teoremi noti, che f non è differenziabile in tali punti (ricordiamo che f potrebbe essere tuttavia derivabile in quei punti, ammettendo cioè entrambe le derivate parziali).

Per quanto riguarda l'origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y\neq 0} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\Theta, \rho\sin\Theta) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log\left(1+\rho^2\cos^2\Theta\right)}{\rho^2\sin^2\Theta}$$
$$= \begin{cases} \lim_{\rho\to 0} \dfrac{\log\left(1+\rho^2\cos^2\Theta\right)}{\rho^2\cos^2\Theta}\dfrac{\cos^2\Theta}{\sin^2\Theta} & ,\ \text{se } \cos^2\Theta \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{se } \cos^2\Theta = 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \cot^2\Theta & ,\ \text{se } \Theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 & ,\ \text{se } \Theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Dipendendo il risultato del limite dalla scelta di Θ, possiamo quindi concludere che f non è continua in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e che ivi non è differenziabile.
Passiamo ora allo studio della derivabilità di f in A. Abbiamo che $\forall (x,y) \in A$

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2)y^2} \quad ; \quad D_y f(x,y) = \frac{-2\log(1+x^2)}{y^3}.$$

Essendo $D_x f,\ D_y f \in C(A)$, ne consegue che $f \in C^1(A)$ e, per i noti teoremi, che f è ivi differenziabile.
Concludiamo studiando la derivabilità lungo l'asse x: fissato $P(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$D_x f(P) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$D_y f(P) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,0+k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{k^3} = \begin{cases} \nexists & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ne discende che f è derivabile nell'origine e non lo è in nessun altro punto dell'asse x.
Riassumendo, le derivate parziali di f divengono:

$$D_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1+x^2)y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$D_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2\log(1+x^2)}{y^3} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \nexists & \text{se } (x,y) = (x,0) \text{ con } x \neq 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto le seguenti informazioni:
(1) Continuità di f in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } y \neq 0\}$;
(2) Derivabilità di f in $A \cup (0,0)$;
(3) Differenziabilità di f in A.

Passiamo ora alla fase successiva dell'esercizio, lo studio dei punti critici di f.
Ricordiamo che, per il Teorema di Fermat, alcuni candidati ad essere estremanti per f sono le soluzioni dell'equazione

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

Osservazione 1. *Risulta evidente che questo criterio ci fornisce solo una parte dei candidati ad essere estremanti per f. Infatti anche i punti di*

$$B = \{(x,0) \text{ tali che } x \in \mathbb{R} \setminus 0\}$$

potrebbero esserlo, nonostante f non sia ivi derivabile. Questo tipo di punti li tratteremo a parte, a conclusione dell'esercizio.

Risolvere $\nabla f(x,y) = (0,0)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2x}{(1+x^2)y^2} = 0 \\ \dfrac{-2\log(1+x^2)}{y^3} = 0 \end{cases} \iff x = 0$$

Ciò equivale a dire che i candidati, forniti dal Teorema di Fermat, sono tutti i punti dell'asse y (compresa l'origine, avendo dimostrato che $D_x f(0,0) = D_y f(0,0) = 0$).
Chiamato $C = \{(0,y) \text{ tali che } y \in \mathbb{R}\}$, avremo quindi che la lista completa dei candidati ad essere estremanti per f sono la totalità dei punti $P \in B \cup C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } xy = 0\}$, ossia tutti i punti appartenenti ai due assi coordinanti.

Per i punti dell'insieme C, ovvero i punti derivanti dallo studio del gradiente, possiamo applicare il test dell'Hessiana anche se tale test risulterà essere inconcludente (lasciamo al lettore la prova di ciò). Osserviamo tuttavia che $\forall\ P \in C$ risulta essere

$$f(P) = \frac{\log(1)}{y^2} = 0$$

il che, unito al fatto che

$$f(x, y) \geq 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ci garantisce che i punti di C sono punti di minimo assoluto per f.
Per quanto riguarda i punti di B, è possibile fare un simile ragionamento, osservando che $\forall\ Q \in B$ risulta essere

$$f(Q) = 0$$

per definizione di f. Nuovamente essi saranno tutti punti di minimo assoluto per f.
Concludendo, potrebbe accadere che i punti di $B \cup C$ possano essere, oltre che punti di minimo assoluto di f, anche punti massimo relativo (o assoluto) di f. Ciò non è tuttavia possibile essendo

$$f(x, y) > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B \cup C.$$

Esercizio 2. *Determinare punti di massimo e minimo relativo per*

$$f(x, y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2$$

in tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

Osserviamo per prima cosa che $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, il che ci permette di affermare che, a differenza dell'esercizio precedente, la ricerca dei punti di estremo di f avverrà solamente tra le soluzioni dell'equazione

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Analogamente a quanto visto prima, abbiamo

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = 0 \\ D_y f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^3 - 2(x + y) = 0 \\ 8y^3 - 2(x + y) = 0 \end{cases}$$

Applicando il metodo di riduzione per sistemi, otteniamo

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = 0 \\ D_y f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4(x^3 - y^3) = 0 \\ 4y^3 - (x + y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 4y^3 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ottenuti i candidati $A(0, 0)$, $B(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2})$, $C(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ad essere punti di estremo per f, andiamo a studiare il test dell'Hessiana in tali punti.

Osservazione 2. *Osserviamo che, essendo $f \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, per il Teorema di Schwarz le derivate (seconde) miste di f saranno necessariamente uguali in tutto $\mathbb{R}^2$ (cioè $D_{xy} f(x, y) = D_{yx} f(x, y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$) e che quindi la matrice Hessiana risulterà essere simmetrica in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.*

Andiamo, a questo punto, a calcolarci le derivate seconde di f in $\mathbb{R}^2$:

$$D_{xx} f(x, y) = 24x^2 - 2;\ D_{xy} f(x, y) = D_{yx} f(x, y) = -2;\ D_{yy} f(x, y) = 24y^2 - 2$$

e, di conseguenza, avremo che $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} D_{xx} f(x, y) & D_{xy} f(x, y) \\ D_{yx} f(x, y) & D_{yy} f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 24y^2 - 2 \end{vmatrix} = (24x^2 - 2)(24y^2 - 2) - (-2)(-2)$$

In particolare, nei punti A, B, C risulterà che

- $Hf(A) = 0$;
- $Hf(B) = Hf(C) = 96 > 0$

Il risultato del test nel punto A risulta quindi essere inconcludente ed esamineremo questo caso per ultimo. Per quanto riguarda invece i punti B e C, essendo

$$D_{xx}f(B) = D_{xx}f(C) = 10 > 0; \ Hf(B) = Hf(C) > 0,$$

risulta necessariamente che B e C sono punti di minimo relativo per f.
Concludiamo l'esercizio analizzando cosa succede in A. Essendo il test dell'Hessiana inconcludente in tale punto, è nostra speranza che esso sia un semplice punto di sella (a questo punto potrebbe risultare più semplice dimostrare che esso sia un punto di sella, determinando - almeno - due direzioni lungo le quali esso sia da una parte massimo relativo e, dall'altra, minimo relativo).
Una strada per dimostrare ciò potrebbe essere la seguente: consideriamo tutte le rette oblique passanti per $x = 0$, $y = mx$ e verifichiamo se, al variare di $m \in \mathbb{R}$, il punto $x = 0$ assume "ruoli diversi". Sia

$$\begin{aligned} g_m &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto g_m(x) = f(x, mx) = 2(x^4 + (mx)^4 + 1) - (x + mx)^2 \end{aligned}$$

Osservazione 3. *Essendo $(0,0)$ punto critico per f risulterà necessariamente che $x = 0$ sarà punto critico per g_m $\forall\ m \in \mathbb{R}$, ed essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, avremo banalmente che $g_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\forall m \in \mathbb{R}$.*

Cerchiamo per prima cosa di capire gli intervalli in cui g_m cresce/decresce, al variare di m in $\mathbb{R}$:

$$g_m'(x) = 2(4x^3 + 4m^3x^3) - 2(x + mx)(1 + m) = 8x^3(1 + m^4) - 2x(1 + m)^2$$

Da cui

$$g_m'(x) = 0 \iff 8x^3(1 + m^4) - 2x(1 + m)^2 = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \text{ come ci aspettavamo} \\ x^2 = \dfrac{(1+m)^2}{4(1+m^4)} \end{cases}$$

e, in particolare,

$$\begin{aligned} g_m'(x) > 0 &\iff 8x^3(1 + m^4) - 2x(1 + m)^2 > 0 \iff x(4x^2(1 + m^4) - (1 + m)^2) > 0 \\ &\iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > \dfrac{(1+m)^2}{4(1+m^4)} \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < \dfrac{(1+m)^2}{4(1+m^4)} \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$x^2 = \frac{(1+m)^2}{4(1+m^4)} \iff x = \pm\sqrt{\frac{(1+m)^2}{4(1+m^4)}}$$

e tale quantità dipende dal valore di m. In particolare, $\forall\ m \neq -1$

$$x^2 = \frac{(1+m)^2}{4(1+m^4)} \iff x = \pm\frac{(1+m)}{2\sqrt{1+m^4}}.$$

Scegliendo, ad esempio, $m = 1$ otteniamo che i punti critici di $g_1(x) = f(x, x) = 2(2x^4 + 1) - 4x^2$ sono i punti

$$x = 0; \ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Per lo studio del segno di g_1', risulta in particolare che $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di minimo relativo.
Consideriamo infine in caso $m = -1$. Per prima cosa osserviamo che i tre punti critici che avevamo trovato $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ convergono all'unico punto $x = 0$, assumendo la funzione g_m la forma

$$g_{-1}(x) = 2(2x^4 + 1) \implies g_{-1}'(x) = 16x^3.$$

Ne consegue che

$$g_{-1}'(x) = 0 \iff x = 0 \ ; \ g_{-1}'(x) > 0 \iff x > 0$$

il che è equivalente ad affermare che il punto $x = 0$ è punto di minimo relativo per la funzione $g_{-1}(x)$.
Avendo trovato quindi due cammini (le due bisettrici), lungo i quali in un caso $x = 0$ è un punto di massimo relativo e nell'altro caso è punto di minimo relativo, possiamo concludere con certezza che il punto $A(0,0)$ è un punto di sella per la funzione di partenza f.