Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Settima lezione - 12/04/2018

1. Esercizi

Esercizio 1. *Sia X un insieme non vuoto e sia*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

una generica metrica su X. Dimostrare che d è una funzione continua in ciascuna delle sue variabili (considerate separatamente) su X.

Soluzione:

Dimostreremo quanto richiesto fissando la seconda variabile (risulterà analogo l'altro caso).
Fissiamo $\overline{y} \in X$ e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} d_1 = d|_X : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d_1(x) = d(x, \overline{y}) \end{aligned}$$

Sarà sufficiente dimostrare che d_1 è continua in X per concludere l'esercizio. Per comodità, dimostreremo l'uniforme continuità di d_1 in X (qui con X intendiamo la prima copia dell'insieme X che compare nell'insieme di definizione della metrica d), osservando che tale condizione è più forte della continuità.
Ricordando la definizione (ε, δ) di uniforme continuità:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \forall\ x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(d_1(x_1), d_1(x_2)) < \varepsilon$$

dove $d_X(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$ e $d_{\mathbb{R}}(d_1(x_1), d_1(x_2)) = |d_1(x_1) - d_1(x_2)| = |d(x_1, \overline{y}) - d(x_2, \overline{y})|$, fissiamo $\varepsilon > 0$ e fissiamo $x_1, x_2 \in X$. Consideriamo quindi la quantità

$$|d(x_1, \overline{y}) - d(x_2, \overline{y})| \leq |d(x_1, x_2) + d(x_2, \overline{y}) - d(x_2, \overline{y})| = |d(x_1, x_2)| < \delta$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza triangolare della metrica d ai punti x_1 e $\overline{y}$.
Sarà quindi sufficiente considerare $\delta = \varepsilon$ affinché risulti

$$|d(x_1, \overline{y}) - d(x_2, \overline{y})| < \delta = \varepsilon$$

Esercizio 2. *Sia*

$$\begin{aligned} T : [1, +\infty[&\to [1, +\infty[\\ x &\mapsto T(x) = 1 + \frac{1}{1 + x}. \end{aligned}$$

Verificare se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Banach-Caccioppoli e, successivamente, determinare l'eventuale (unico) punto fisso.

Soluzione:

Affinché siano soddisfatte le ipotesi del Teorema di Banach-Caccioppoli, ottenendo così l'esistenza ed unicità del punto fisso $\overline{x} \in X = [1, +\infty[$, è necessario verificare che:

- l'insieme $X = [1, +\infty[$, accoppiato con un'appropriata metrica d_X è uno spazio metrico <u>completo</u>;
- la mappa T è una <u>contrazione</u> in X (rispetto alla stessa metrica d_X del punto precedente).

Essendo $[1,+\infty[\subset \mathbb{R}$, risulta naturale aspettarsi che d_X possa essere la metrica indotta da quella di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d_X = |\cdot||_X : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d_X(x,y) = |x-y| \end{aligned}$$

Verifichiamo quindi che $(X, d_X) = ([1,+\infty[, |\cdot||_X)$ è uno spazio metrico completo:

(*i*) l'essere uno spazio metrico è ovvio, avendo definito d_X come metrica di sottospazio;
(*ii*) la completezza discenderebbe da quella del (sovra)spazio metrico completo $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, qualora X risultasse chiuso in $\mathbb{R}$, per dei noti teoremi (e ciò è vero essendo $\mathbb{R}\setminus X =]-\infty, 1[$ aperto in $\mathbb{R}$).

Fissiamo $x_1, x_2 \in [1,+\infty[$ e proviamo a vedere se la mappa T è una contrazione nello spazio metrico $([1,+\infty[, |\cdot||_X))$:

$$|T(x_1)-T(x_2)| = \left|1+\frac{1}{1+x_1} - \left(1+\frac{1}{1+x_2}\right)\right| = \left|\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}\right| = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}|x_1-x_2|$$

Osservazione 1. *Osserviamo che definendo* $\alpha = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}$*, ottenendo così* $|T(x_1)-T(x_2)| = \alpha|x_1-x_2|$*, non si avrebbe immediatamente che la mappa* T *è una contrazione, essendo* $\alpha = \alpha(x_1,x_2)$ *dipendente dalla scelta dei punti* $x_1, x_2 \in X$.
Essendo tuttavia $x_1, x_2 \in X = [1,+\infty[$*, ne discende che:*

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1+x_1 \geq 2 \\ 1+x_2 \geq 2 \end{cases} \implies (1+x_1)(1+x_2) \geq 4 \implies \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} \leq \frac{1}{4}$$

Risulta quindi T *una contrazione in* (X, d_X) *di costante di contrazione* $\alpha = \frac{1}{4} \in (0,1)$.

Siamo quindi nelle ipotesi del Teorema di Banach-Caccioppoli, che ci assicura l'esistenza ed unicità del punto fisso $\overline{x} \in [1,+\infty[$ tale che

$$\overline{x} = T(\overline{x}) = 1 + \frac{1}{1+\overline{x}} \iff \overline{x} + \overline{x}^2 = 1 + \overline{x} + 1 \iff \overline{x}^2 = 2 \iff \overline{x} = +\sqrt{2}$$

dove abbiamo scartato la soluzione $\overline{x} = -\sqrt{2}$ non essendo essa appartenente all'insieme $X = [1,+\infty[$.

Esercizio 3. *Posto*

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}$$

determinare un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ *ed una mappa* $T : A \to A$ *che verifichino le ipotesi dei teoremi di punto fisso, al fine di calcolare il valore esatto di* x.

Soluzione:

Osserviamo per prima cosa che, essendo

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}$$

ne consegue che

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ci chiediamo quindi se esiste un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che sia A che la mappa

$$\begin{aligned} T : A &\to A \\ x &\mapsto T(x) = 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

soddisfino le ipotesi del Teorema di Banach-Caccioppoli.

Osservazione 2. *Per come abbiamo definito la mappa* T*, risulta evidente che* A *sarà un sottoinsieme di* $B = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Essendo* B *aperto in* $\mathbb{R}$*, ne consegue che* A *sarà un sottoinsieme proprio di* B*, ricordando il legame tra chiusura e completezza di uno spazio metrico (stiamo già implicitamente pensando di assegnare all'insieme* A *la metrica di sottospazio di* $\mathbb{R}$*).*

Fissiamo quindi $a \in \mathbb{R}^+$ e definiamo

$$A =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[.$$

Per considerazioni simili a quelle del precedente esercizio, $(A, d_A = |\cdot||_A)$ è uno spazio metrico completo. Ci chiediamo quindi se esiste almeno un valore ammissibile di $a \in \mathbb{R}^+$ tale che la mappa T sia una contrazione nello spazio metrico (A, d_A). Ciò è vero se, comunque fissati $x_1, x_2 \in A$, $\exists\ \alpha \in (0,1)$ tale che

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|.$$

Osservando che

$$|T(x_1) - T(x_2)| = \left|1 + \frac{1}{x_1} - \left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1||x_2|} \leq \frac{1}{a^2}|x_1 - x_2|$$

essendo

$$\begin{cases} |x_1| \geq a \\ |x_2| \geq a \end{cases} \implies |x_1||x_2| \geq a^2$$

affinché T sia una contrazione in (A, d_A), è necessario che (n.b. $a \in \mathbb{R}^+$)

$$\frac{1}{a^2} \in (0,1) \iff a^2 > 1 \iff a > 1.$$

Ciò ci assicura che $\forall\ a \in]1, \infty[$, la mappa T soddisfa le ipotesi del Teorema di Banach-Caccioppoli in $(A, d_A) = (]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[, |\cdot||_A)$, ovvero $\exists!\ \overline{x} \in A$ tale che

$$\overline{x} = T(\overline{x}) = 1 + \frac{1}{\overline{x}} \iff \overline{x}^2 - \overline{x} - 1 = 0 \iff \overline{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \iff \overline{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618..$$

dove abbiamo scartato la soluzione $\overline{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618..$ non essendo essa appartenente all'insieme A.

Osservazione 3. *Osserviamo che la soluzione che abbiamo ottenuto è il numero irrazionale noto in letteratyra come Φ oppure come "sezione aurea". Questo esercizio ci mostra come tale numero, così come accadeva per il numero irrazionale $\sqrt{2}$ nell'esercizio precedente, sia esprimibile mediante soluzione di una semplice equazione di secondo grado o, equivalentemente, come risultato della frazione continua testo dell'esercizio.*