Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

ALBERTO MAIONE

Terza lezione - 15/03/2018

1. Richiami teorici

1.1. Spazi Topologici.

Definizione 1. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\tau \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$;
(ii) *unioni arbitrarie di elementi di $\tau \in \tau$;*
(iii) *intersezioni finite di elementi di $\tau \in \tau$.*

τ prende il nome di topologia su X. Definiremo la coppia (X, τ) spazio topologico e aperto ogni elemento di τ. Definiamo infine chiuso ogni sottoinsieme di X il cui complementare è un aperto in (X, τ).

Osservazione 1. *Ogni spazio metrico è banalmente uno spazio topologico.*
Posto infatti (X, d) un generico spazio metrico, è possibile definire una topologia τ_d in X che ha come base

$$\mathcal{B}_{\tau_d} := \{D(x, r) \text{ tali che } x \in X,\ r \in \mathbb{R}^+\}$$

dove $D(x, r) = \{y \in X \text{ tali che } d(y, x) < r\}\ \forall\ x \in X\ \forall\ r \in \mathbb{R}^+$. Si dimostra che (X, τ_d) è uno spazio topologico (è sufficiente verificare che sussiste la definizione precedente). Definiamo τ_d topologia indotta dalla metrica d.

Osservazione 2. *Osserviamo che ogni sottoinsieme di X puó in generale essere, rispetto alla topologia τ, aperto, chiuso, aperto e chiuso, né aperto né chiuso. Ad esempio, nello spazio topologico $(\mathbb{R}^N, \tau_d)$, dove τ_d è la topologia indotta da una delle metriche equivalenti in $\mathbb{R}^N$ indotte dalle norme equivalenti, gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono $\mathbb{R}^N$ e l'insieme $\emptyset$. Questo fatto non è tuttavia vero in generale. Posto (X, τ) un generico spazio topologico, possono esistere sottoinsiemi propri di X contemporaneamente aperti e chiusi (si veda a tal proposito l'esercizio 1).*

1.2. Spazi compatti.

Definizione 2. *Sia (X, τ) un generico spazio topologico e sia*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

una famiglia di sottoinsiemi di X, non necessariamente disgiunti. Definiamo $\mathcal{A}$ ricoprimento di X se

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U.$$

Osservazione 3. *Se tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ sono aperti in (X, τ), definiamo $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X.*

Definizione 3. *Sia (X, τ) un generico spazio topologico. Lo definiremo compatto se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito. Posto quindi $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X deve $\exists\ \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, formato da un numero finito di sottoinsiemi di X, tale che*

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V.$$

Osservazione 4. *Si puó dimostrare che, nel caso in cui lo spazio topologico (X, τ) sia la coppia $(\mathbb{R}^N, \tau_d)$, dove τ_d è la topologia indotta da una delle metriche equivalenti in $\mathbb{R}^N$ indotte dalle norme equivalenti, la precedente definizione è equivalente alla seguente:*

Definizione 4. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$. Diremo che E è compatto in $(\mathbb{R}^N, \tau_d)$, nel senso della definizione precedente, se e solo se E è chiuso, nello spazio topologico $(\mathbb{R}^N, \tau_d)$ e limitato, nello spazio metrico $(\mathbb{R}^N, d)$.*

2. Esercizi

Esercizio 1. *Sia X un insieme non vuoto e sia*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & se\ x = y \\ 1, & se\ x \neq y \end{cases}$$

Si verifichi che:

(1) *La coppia (X, d) è uno spazio metrico.*
(2) *Nello spazio topologico indotto (X, τ_d), ovvero rispetto alla topologia indotta dalla metrica d, ogni sottoinsieme di X è contemporaneamente aperto e chiuso.*

Soluzione:

(1) (i) Per definizione di d abbiamo banalmente che

$$d(x, y) \geq 0 \ \forall\ x, y \in X$$

e che

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \ \ \forall\ x, y \in X.$$

(ii) Anche la simmetria di d discende da come tale funzione è stata definita.

(iii) Dimostriamo infine che

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall\ x, y, z \in X.$$

· Fissati $x, y \in X$, osserviamo che se $x = y$ la disuguaglianza è banalmente verificata $\forall\ z \in X$. Infatti

$$d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y).$$

· Se invece $x \neq y$ abbiamo che $z \neq x \vee z \neq y \ \forall\ x, y, z \in X$, da cui

$$\begin{cases} z \neq x \implies d(x, z) = 1 \\ z \neq y \implies d(z, y) = 1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che

$$d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Ne consegue che la coppia (X, d) è uno spazio metrico.

(2) Consideriamo ora lo spazio topologico (X, τ_d) dove τ_d è la topologia indotta dalla metrica d, che ha per base

$$\mathcal{B}_{\tau_d} = \{D(x, r) \text{ tali che } x \in X,\ r > 0\}$$

e mostriamo che ogni sottoinsieme di X è contemporaneamente aperto e chiuso in questo spazio topologico.

Per comoditá lo dimostriamo prima nel caso elementare dei singoletti e poi nel caso generale di sottoinsiemi qualunque di X.

(a) Fissiamo $x \in X$ e consideriamo $A = \{x\} \subset X$.
Mostriamo per prima cosa che A è aperto ($A \in \tau_d$). Ció è vero se $\exists\ r > 0$ tale che $D(x, r) \subset A$.
Per come è stata definita la metrica d è sufficiente prendere un qualunque raggio $0 < r < 1$.
Scegliendo infatti ad esempio $r = \frac{1}{2}$, si ha che

$$D\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} = A$$

da cui segue l'asserto.
Per concludere questo primo caso facciamo vedere che A è chiuso, ovvero che $X \setminus A$ è aperto ($X \setminus A \in \tau_d$).
Fissiamo $y \in X \setminus A (\implies y \neq x)$ e $0 < r < 1$ (ad esempio $r = \frac{1}{2}$). Abbiamo nuovamente che

$$D\left(y, \frac{1}{2}\right) = \{y\} \subset X \setminus A \implies X \setminus A \in \tau_d.$$

Ne consegue che $A = \{x\}$ è contemporaneamente aperto e chiuso in (X, τ_d).

(b) Vediamo adesso il caso generale. Sia $A \subset X \implies \exists\ x_1, ..., x_j \in X$ con $J = \{1, .., j\} \subset \mathbb{N}$ insieme ordinato di indici non necessariamente finito, tale che

$$A = \{x_1, ..., x_j\} = \bigcup_{i \in J} \{x_i\}.$$

Poiché in (a) abbiamo dimostrato che $\{x_i\} \in \tau_d\ \forall\ i \in J$, ne consegue, per la proprietá (ii) di una topologia, che

$$A = \bigcup_{i \in J} \{x_i\} \in \tau_d$$

ovvero che A è aperto in (X, τ_d).
Per concludere l'esercizio dimostriamo che $X \setminus A \in \tau_d$. Analogamente a prima $\exists\ y_1, ..., y_k \in X$ con $K = \{1, ..., k\} \subset \mathbb{N}$ insieme ordinato di indici non necessariamente finito, tale che

$$X \setminus A = \{y_1, ..., y_k\} = \bigcup_{i \in K} \{y_i\}.$$

Essendo $\{y_i\} \in \tau_d\ \forall\ i \in K$, risulta quindi che

$$X \setminus A = \bigcup_{i \in K} \{y_i\} \in \tau_d$$

ovvero che A è chiuso in (X, τ_d).

Esercizio 2. *Descrivere le proprietá metriche e topologiche del sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x + y = 10\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Osservazione 5. *Vediamo alcuni utili consigli e osservazioni per affrontare questo tipo di esercizi:*

(1) *Indicando il nostro spazio di riferimento solamente come* $\mathbb{R}^2$ *sottintendiamo, se non diversamente specificato, che esso sia lo spazio metrico* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *e/o lo spazio topologico* $(\mathbb{R}^2, \tau_{d_2})$*, con* d_2 *metrica euclidea.*

(2) *Le proprietá metriche e topologiche fin qui esaminate sono:*
limitatezza (proprietá metrica); apertura, chiusura, compattezza (proprietá topologiche).
Per quanto detto in precedenza, esistono dei legami tra le proprietá appena citate:
   (i) *Se ad esempio* A*, sottoinsieme* <u>*proprio*</u> *di* $\mathbb{R}^2$*, fosse aperto in* $\mathbb{R}^2$*, esso non potrebbe contemporaneamente essere anche chiuso, poiché gli unici sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^N$ *contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto* $\emptyset$ *e tutto* $\mathbb{R}^N\ \forall\ N \in \mathbb{N}$*. Analogamente, se* A *fosse chiuso in* $\mathbb{R}^2$*, non potrebbe essere contemporaneamente anche aperto in* $\mathbb{R}^2$*; tuttavia* A *potrebbe essere né aperto né chiuso in* $\mathbb{R}^2$*.*
   (ii) *Ricordando che ogni sottoinsieme di* $\mathbb{R}^N\ \forall\ N \in \mathbb{N}$ *è compatto se e solo se è chiuso e limitato, qualora* A *non fosse limitato o chiuso non sarebbe automaticamente neppure compatto in* $\mathbb{R}^2$*.*

(3) *Osserviamo poi che, per come è stato definito, l'insieme* A *rappresenta i punti di una retta del piano* xy*. Intuitivamente, un insieme del genere non potrá né essere limitato (perché dovrebbe, in caso contrario, essere tutto contenuto in un disco di* $\mathbb{R}^2$*), e quindi neppure compatto per l'osservazione precedente, né essere aperto in* $\mathbb{R}^2$ *(se lo fosse avremmo l'esistenza di un disco centrato in ogni punto di* A*, di raggio positivo, tutto contenuto in* A *stesso; è tuttavia evidente che ogni punto di* A *è un punto di frontiera).*

(4) *Non esiste un modo universale per risolvere questo tipo di esercizi. Elenchiamo qui di seguito alcuni suggerimenti.*
   (a) *Per dimostrare, ad esempio, che un sottoinsieme di uno spazio topologico è un aperto, si puó procedere come segue:*
      (a1) *Far vedere che, fissato un* <u>*generico*</u> *elemento dell'insieme, esiste almeno un intorno centrato in tale elemento contenuto nell'insieme stesso;*
      (a2) *dimostrare che l'intersezione tra l'insieme e la sua frontiera è vuota;*
      (a3) *dimostrare che* <u>*ogni*</u> *successione definita in tutto lo spazio topologico e convergente ad un elemento dell'insieme esaminato è in definitiva, cioè a meno di sottosuccessioni, tutta contenuto nell'insieme;*
      (a4) *dimostrare che l'insieme è unione (non necessariamente finita) di aperti dello spazio topologico;*
      (a5) *dimostrare che l'insieme è intersezione* <u>*finita*</u> *di aperti dello spazio topologico;*
      (a6) *dimostrare che il complementare dell'insieme è un chiuso dello spazio topologico;*
      (a7) *dimostrare che l'insieme è contenuto/coincide nella/con la sua apertura;*

(a8) *dimostrare che l'insieme è controimmagine, tramite una funzione continua, di un insieme che sappiamo per certo essere aperto in un qualche spazio topologico.*

(b) *Per dimostrare che non è aperto si consiglia di:*
  (b1) *Mostrare l'esistenza di* <u>*almeno una*</u> *successione, interamente contenuta nel complementare dell'insieme (cioè nello spazio topologico di riferimento ma non nell'insieme esaminato) dove, solo il punto limite, appartiene all'insieme;*
  (b2) *mostrare che il complementare non è chiuso;*
  (b3) *mostrare che l'intersezione tra l'insieme e la sua frontiera non è vuota trovando almeno un punto di frontiera appartenente all'insieme.*

(c) *Per dimostrare che è chiuso:*
  (c1) *Far vedere che il complementare è un aperto;*
  (c2) *far vedere che l'insieme contiene tutta la sua frontiera;*
  (c3) *dimostrare che l'insieme contiene/coincide la/con la sua chiusura;*
  (c4) *dimostrare che l'insieme contiene tutti i suoi punti d'accumulazione;*
  (c5) *dimostrare che* <u>*per ogni*</u> *successione interamente contenuta all'interno dell'insieme e convergente ad* <u>*un elemento*</u> *dello spazio topologico, allora tale elemento appartiene all'insieme;*
  (c6) *dimostrare che l'insieme è unione* <u>*finita*</u> *di chiusi dello spazio topologico;*
  (c7) *dimostrare che l'insieme è intersezione (non necessariamente finita) di chiusi dello spazio topologico;*
  (c8) *dimostrare che l'insieme è la controimmagine, tramite una funzione continua, di un insieme che sappiamo per certo essere chiuso in un qualche spazio topologico;*
  (c9) *(se siamo in* $\mathbb{R}^N$*, con* $N \in \mathbb{N}$*) dimostare che l'insieme è compatto.*

(d) *Per dimostrare che non è chiuso:*
  (d1) *Dimostrare l'esistenza di* <u>*almeno una*</u> *successione interamente contenuta all'interno dell'insieme ma convergente ad un elemento appartenente al complementare dell'insieme esaminato;*
  (d2) *dimostrare che il complementare dell'insieme non è aperto nello spazio topologico;*
  (d3) *dimostrare l'esistenza di un punto di frontiera appartenente al complementare dell'insieme esaminato.*

(e) *Per dimostrare che è limitato:*
  (e1) *Dimostare che il diametro dell'insieme è finito;*
  (e2) *Dimostrare l'esistenza di un disco, di raggio finito, dello spazio metrico contenente interamente l'insieme esaminato;*
  (e3) *(se siamo in* $\mathbb{R}^N$*, con* $N \in \mathbb{N}$*) dimostrare che l'insieme è compatto.*

(f) *Per dimostrare che non è limitato:*
  (f1) *Dimostrare il diametro dell'insieme non è finito;*
  (f2) *dimostrare che non puó esistere alcun disco, di raggio finito, dello spazio metrico contenente l'insieme esaminato.*

(g) *Per dimostrare che è compatto:*
  (g1) *(Se siamo in* $\mathbb{R}^N$*, con* $N \in \mathbb{N}$*) far vedere che l'insieme è chiuso e limitato;*
  (g2) *dimostrare che* <u>*ogni*</u> *ricoprimento aperto dell'insieme ammette un sottoricoprimento finito (poco pratica).*

(h) *Per dimostrare che non è compatto:*
  (h1) *Dimostrare l'esistenza di* <u>*almeno un*</u> *ricoprimento aperto dell'insieme che non ammette alcun sottoricoprimento finito;*
  (h2) *(se siamo in* $\mathbb{R}^N$*, con* $N \in \mathbb{N}$*) dimostrare che l'insieme non è chiuso;*
  (h3) *(se siamo in* $\mathbb{R}^N$*, con* $N \in \mathbb{N}$*) dimostrare che l'insieme non è limitato.*

Soluzione:

Per dimostrare la non limitatezza dell'insieme A è sufficiente far vedere che, fissato un punto $P \in \mathbb{R}^2$,

$$A \not\subset D(P,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } d_2((x,y),P) < r\} \ \forall\ r \in \mathbb{R}^+.$$

Fissato, ad esempio $P = O(0,0) \in \mathbb{R}^2$, supponiamo <u>per assurdo</u> che $\exists\ R \in \mathbb{R}^+$ tale che $A \subset D(O,R)$ e consideriamo il punto

$$Q(R+1, 10-(R+1)) \in A.$$

Se dimostrassimo che $Q \in A \setminus D(O,R)$, avremmo ottenuto l'assurdo. A tal fine, è sufficiente dimostrare che $d_2(Q,O) \geq R$. Senza calcolarci esplicitamente il valore di $d_2(Q,O)$ e verificare che tale valore sia maggiore o uguale ad R (sicuramente corretto come ragionamento), possiamo semplicemente osservare che, dato il

triangolo rettangolo di vertici $S(R+1,0), Q(R+1,10-(R+1)), O(0,0) \in \mathbb{R}^2$, abbiamo che il segmento di vertici $\overline{QO}$ corrisponde all'ipotenusa di tale triangolo. Ne consegue che la lunghezza del segmento $\overline{QO}$, espressa nello spazio metrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$ dalla distanza $d_2(Q,O)$, debba essere necessariamente maggiore o uguale alla lunghezza di ciascun cateto.
Abbiamo in particolare che

$$R+1 = d_2(S,O) = \overline{SO} \le \overline{QO} = d_2(Q,O)$$

da cui segue l'assurdo.
Per quanto detto in precedenza, abbiamo quindi che A non è compatto in $\mathbb{R}^2$, non essendo limitato.
Per concludere l'esercizio dimostriamo che A è chiuso in $\mathbb{R}^2$. Ricordiamo che dimostrare che A è chiuso nello spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \tau_{d_2})$ è equivalente a dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus A \in \tau_{d_2}$, ovvero che il complementare di A è un aperto di tale spazio. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \setminus A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x+y \neq 10\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x+y < 10\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x+y > 10\} := B \cup C.\end{aligned}$$

Ricordando che, per definizione di spazio topologico, l'unione di due aperti è ancora un aperto, è sufficiente dimostrare che B e C sono aperti di $(\mathbb{R}^2, \tau_{d_2})$ (dimostriamolo per B, analogamente si puó provare per C).
Ricordiamo che $B \in \tau_{d_2}$ (cioé è un aperto) se $\forall\ b \in B\ \exists\ r > 0$ tale che $D(b,r) \subset B$.
Fissiamo quindi $b \in B$ e definiamo

$$\delta := dist(b, A) = min_{a \in A} d(b,a) > 0.$$

Per la completezza di $\mathbb{R}$, $\exists\ r \in \mathbb{R}$ tale che $0 < r < \delta$. Ne consegue che

$$D(b,r) \subset B.$$

Dimostrando allo stesso modo che $C \in \tau_{d_2}$, otteniamo che

$$\mathbb{R}^2 \setminus A = B \cup C \in \tau_{d_2}$$

ovvero che A è chiuso in $(\mathbb{R}^2, \tau_{d_2})$.

Esercizio 3. *Dimostrare che $\mathbb{R}^N$ non è compatto $\forall\ N \in \mathbb{N}$.*

Osservazione 6. *Da questo momento in avanti sottintenderemo con $\mathbb{R}^N$ lo spazio topologico $(\mathbb{R}^N, \tau_{d_2})$, dove τ_{d_2} è la topologia indotta dalla metrica euclidea.*

SOLUZIONE:

Fissiamo $N \in \mathbb{N}$. Per dimostrare che $\mathbb{R}^N$ non è compatto, è sufficiente trovare un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^N$ che non ammetta alcun sottoricoprimento finito nello spazio topologico esaminato.
Sia $\mathcal{A} := \{B(O,n) \text{ tale che } n \in \mathbb{N}\}$, dove $B(O,n) = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tale che } d_2(x,O) < n\}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

(1) Mostriamo per prima cosa che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^N$, cioè che ogni elemento di $\mathcal{A}$ è un aperto del nostro spazio topologico (vero per come è stato definito $\mathcal{A}$) e che

$$\mathbb{R}^N = \mathcal{A}.$$

($\subset$) Sia $x \in \mathbb{R}^N$ e sia $r = d_2(x,O) \in \mathbb{R}_0^+$

$$\implies x \in B(O,n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(O,n) = \mathcal{A}\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > r.$$

($\supset$) Ovvia per costruzione di $\mathcal{A}$.

(2) Verifichiamo, per concludere, che (A) non ammette alcun sottoricoprimento finito.
Supponiamo per assurdo che esista un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$, cioè che $\exists\ \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tale che

$$\mathbb{R}^N = \mathcal{B}.$$

Osserviamo che, per come è stato definito $\mathcal{A}$, un suo ipotetico sottoricoprimento finito dovrebbe essere del tipo

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} B(O, n_i)$$

con $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ in numero finito.
Posto quindi $\overline{n} := max_{i=1,...,k}\{n_i\}$, deve risultare che

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} B(O, n_i) = B(O, \overline{n}) = \mathbb{R}^N.$$

Scelto tuttavia il vettore $x = (\overline{n}+1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N$, risulta che esso non possa appartenere a $\mathcal{B}$ essendo

$$d_2(x, O) = \overline{n} + 1 > \overline{n}$$

il che è assurdo.

Esercizio 4. *Descrivere le proprietá metriche e topologiche del sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \textit{ tali che } x^2 + y^2 = 4\} \subset \mathbb{R}^3.$$

SOLUZIONE:

Osserviamo subito che, per come è stato definito, l'insieme A rappresenta una superficie cilindrica infinita di raggio 2, con asse coincidente con l'asse z.
Poiché ogni intorno di ogni punto di A interseca sia elementi di A che elementi del complementare di A, $\mathbb{R}^3 \setminus A$, ne consegue che la frontiera di A coincide con A stesso, ovvero che

$$Fr(A) = A.$$

Da un noto teorema sui chiusi di un generico spazio topologico sappiamo che una delle condizioni equivalenti all'essere chiuso per un sottoinsieme dello spazio topologico è proprio quella che la propria frontiera sia contenuta (o meglio ancora coincida) nell'insieme stesso. Ne consegue che A debba necessariamente essere chiuso e che, essendo A un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^3$, esso non possa essere anche aperto in $\mathbb{R}^3$.
Osserviamo infine che A non è compatto non essendo limitato in $\mathbb{R}^3$. Infatti, è evidente dalla costruzione dell'insieme A, che

$$diam(A) = \infty$$

e che quindi A non sia limitato in $\mathbb{R}^3$.