Università degli Studi di Trento

CORSO DI ANALISI MATEMATICA II
DIPARTIMENTO DI FISICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018

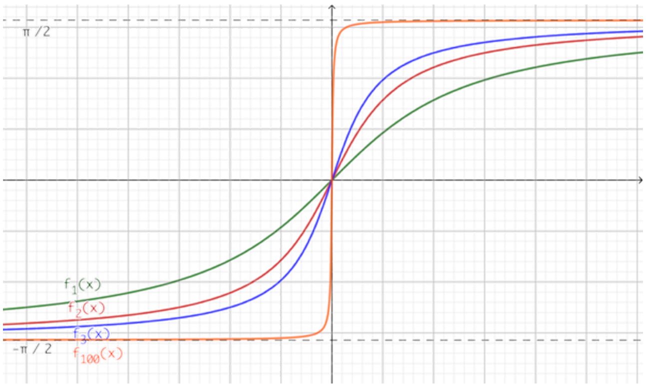
ALBERTO MAIONE

Undicesima lezione - 09/05/2018

1. Esercizi

Esercizio 1. *Sia* $X = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *(insieme delle funzioni continue) e sia* $(f_n)_n \subset X$ *la successione di funzioni definita puntualmente da* $f_n(x) = \arctan(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$. *Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione* $(f_n)_n$ *e determinare il più grande sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *in cui si ha convergenza uniforme.*

Soluzione:
Prima di andare a calcolare l'eventuale funzione limite f, osserviamo cosa accade a livello grafico:



Qui abbiamo riportato i grafici di $f_n(x)$ per i valori $n = 1, 2, 3, 100$.
Osserviamo le seguenti cose:

- al crescere di $n \in \mathbb{N}$, e fuori da un intorno dell'origine sufficientemente piccolo, la successione $(f_n(x))_n$ si comporta nel seguente modo:
$$\begin{cases} f_n(x) \to \frac{\pi}{2} \text{ se } x>0 \\ f_n(x) \to -\frac{\pi}{2} \text{ se } x<0 \end{cases}$$
al tendere di n all'infinito;
- in $x = 0$ invece:
$$f_n(0) = \arctan(0) = 0 \to 0.$$

Intuiamo quindi che, se esistesse una funzione limite f, essa dovrebbe avere la seguente forma:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per dimostrare l'effettiva convergenza puntuale di $(f_n)_n$ a f fissiamo $\overline{x} \in \mathbb{R}^+$ e verifichiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\overline{x}) = \frac{\pi}{2}$$
A tal fine, applicando la definizione di limite, fissiamo $\varepsilon > 0$ e andiamo a valutare la distanza in $\mathbb{R}$:
$$d_{\mathbb{R}}(f_n(\overline{x}), f(\overline{x})) = |f_n(\overline{x}) - f(\overline{x})| = \left|\arctan(n\overline{x}) - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \arctan(n\overline{x})$$

Osserviamo che tale quantità è minore di ε se e solo se:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(n\overline{x}) < \varepsilon \iff \arctan(n\overline{x}) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \iff n\overline{x} > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \cot(\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\overline{x}}\cot(\varepsilon)$$

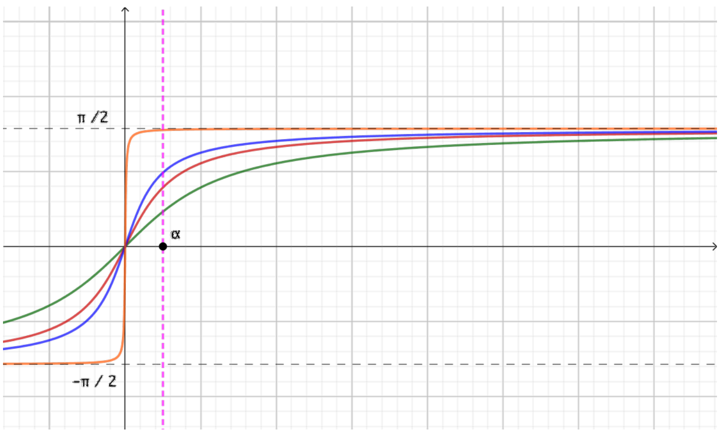
Scelto quindi $N = N(\varepsilon, \overline{x}) = \lceil \frac{1}{\overline{x}}\cot(\varepsilon) \rceil \in \mathbb{N}$ (si osservi che tale quantità diventa molto grande per ε tendente a 0), sappiamo con certezza che $d_{\mathbb{R}}(f_n(\overline{x}), f(\overline{x})) < \varepsilon \ \forall n > N$, ovvero che $(f_n)_n$ converge puntualmente a f in $\mathbb{R}^+$ (il caso $x \in \mathbb{R}^-$ risulterà analogo, con opportuni aggiustamenti, mentre il caso $x = 0$ è già stato trattato precedentemente).

Osservazione 1. *Essendo $N = N(\varepsilon, \overline{x})$, non possiamo asserire che vi sia convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$ (andrebbe verificato attraverso la definizione di convergenza uniforme); tuttavia, non essendo la funzione limite f continua in tutto $\mathbb{R}$, per i noti teoremi, possiamo asserire con certezza che non c'è speranza di avere convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$. Per lo studio di tale convergenza, ci restringeremo al più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui la funzione limite f risulta essere continua: $\mathbb{R}^+$ (oppure, analogamente, $\mathbb{R}^-$).*

Ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $(f_n)_n$ converga uniformemente a $f(x) = \frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{R}^+$ è che la corrispondente successione numerica a_n converga a $0 \in \mathbb{R}$, dove:

$$a_n := \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)\right) = \frac{\pi}{2} - \inf_{x\in\mathbb{R}^+} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}$$

Capiamo quindi che non vi è convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}^+$. Il problema risulta essere la vicinanza all'origine, che rende la quantità $\inf_{x\in\mathbb{R}^+} \arctan(nx) = 0$. Per poterci 'allontanare' dall'origine, dobbiamo fissare $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e studiare la convergenza uniforme nell'intervallo $[\alpha, +\infty[$. Graficamente:



Risulta infatti che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \inf_{x\in[\alpha,+\infty[} \arctan(nx)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(n\alpha)\right] = 0$$

poiché, dalla definizione di limite, fissato $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(n\alpha) < \varepsilon \iff \arctan(n\alpha) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \iff n\alpha > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \cot(\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\alpha}\cot(\varepsilon)$$

Scelto quindi $N = N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\alpha}\cot(\varepsilon) \rceil \in \mathbb{N}$, risulta essere verificata la definizione di limite $\forall n > N$. (Si può, in modo del tutto analogo, dimostrare che il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^-$ in cui vi è convergenza uniforme è del tipo $]-\infty, -\beta]$, con $\beta \in \mathbb{R}^+$ prossimo allo 0).